

## Przykładowe zadania egzaminacyjne

1. (a) Oblicz całkę

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z+1},$$

gdzie  $\Gamma$  jest dodatnio zorientowanym okręgiem  $|z+1|=3$ .

- (b) Czy funkcja  $f(z) = \frac{1}{z+1}$  ma funkcję pierwotną w obszarze

$$D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+1| < 4\}?$$

2. Rozwiń podane funkcje w szereg Laurenta na wskazanych zbiorach:

(a)  $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}, \quad 0 < |z-1| < 2,$

(b)  $f(z) = \frac{1}{(z-i)(z-2)}, \quad 1 < |z| < 2.$

3. Korzystając z twierdzenia o residuach oblicz całki krzywoliniowe

- (a)

$$\int_{\Gamma} \frac{z^3 e^{1/z} dz}{1+z},$$

gdzie  $\Gamma$  jest dodatnio zorientowanym okręgiem  $|z|=2$ ,

- (b)

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^3+1},$$

gdzie  $\Gamma$  jest ujemnie zorientowanym okręgiem  $|z|=5$ .

4. Oblicz całkę niewłaściwą

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+4)^3}.$$

Odpowiedź uzasadnij powołując się na twierdzenie o residuach.

5. Znajdź ilość zer wielomianu  $p(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$  w kole  $|z| < 1$ .

6. Wyznacz

$$\max_{|z| \leq 1} |e^{z^2+z}| \quad \text{oraz} \quad \min_{|z| \leq 1} |e^{z^2+z}|.$$

Wsk.  $|e^{w(z)}| = e^{\operatorname{Re} w(z)}$ .

7. Wykaż, że funkcja  $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$  jest funkcją harmoniczną na całej płaszczyźnie zespolonej. Wyznacz funkcję całkowitą  $f(z)$  taką, że  $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$ ,  $z = x + iy$ .

8. Znajdź funkcję całkowitą zerującą się dokładnie w punktach  $a_n = -\sqrt{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$