Przykładowe zadania egzaminacyjne

1. (a) Oblicz całkę
$$\int_\Gamma \frac{dz}{z+1},$$
gdzie Γ jest dodatnio zorientowanym okręgiem $|z+1| = 3$.

   (b) Czy funkcja $f(z) = \frac{1}{z+1}$ ma funkcję pierwotną w obszarze
$$D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+1| < 4\}?$$

2. Rozwiń podane funkcje w szereg Laurenta na wskazanych zbiorach:

   (a) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-3)}, \quad 0 < |z-1| < 2,$

   (b) $f(z) = \dfrac{1}{(z-i)(z-2)}, \quad 1 < |z| < 2.$

3. Korzystając z twierdzenia o residuach oblicz całki krzywoliniowe

   (a)
$$\int_\Gamma \frac{z^3 e^{1/z}\,dz}{1+z},$$
gdzie Γ jest dodatnio zorientowanym okręgiem $|z| = 2$,

   (b)
$$\int_\Gamma \frac{dz}{z^3+1},$$
gdzie Γ jest ujemnie zorientowanym okręgiem $|z| = 5$.

4. Oblicz całkę niewłaściwą
$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2+4)^3}.$$
Odpowiedź uzasadnij powołując się na twierdzenie o residuach.

5. Znajdź ilość zer wielomianu $p(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ w kole $|z| < 1$.

6. Wyznacz
$$\max_{|z|\le 1} |e^{z^2+z}| \quad \text{oraz} \quad \min_{|z|\le 1} |e^{z^2+z}|.$$
Wsk. $|e^{w(z)}| = e^{\mathrm{Re}\, w(z)}$.

7. Wykaż, że funkcja $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$ jest funkcją harmoniczną na całej płaszczyźnie zespolonej. Wyznacz funkcję całkowitą $f(z)$ taką, że $\mathrm{Re} f(z) = u(x,y)$, $z = x+iy$.

8. Znajdź funkcję całkowitą zerującą się dokładnie w punktach $a_n = -\frac{1}{\sqrt{n}}$, $n = 1, 2, \ldots$