Wykład 12.06.2023

Mówimy, że ciąg funkcji $\{f_n\}$ na obszarze $D \subset \mathbb{C}$ jest **niemal jednostajnie zbieżny**, jeśli jest on zbieżny na każdym podzbiorze zwartym obszaru D. Ławo zauważyć, że granica niemal jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji holomorficznych na obszarze D jest też funkcją holomorficzną w tym obszarze. Istotnie, jeśli z jest dowolnym punktem obszaru D, to dla krzywej Jordana $\gamma \subset D$ takiej, że z jest punktem wewnętrznym γ mamy

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \quad n = 1, 2 \ldots .$$

Ponieważ γ jest podzbiorem zwartym, więc ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny jednostajnie na γ, a więc

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta,$$

co oznacza, że $f(z)$ jest całką Cauchy'ego, a więc jest funkcją analityczną w każdym punkcie obszaru.

Twierdzenie 1. (Twierdzenie Weierstrassa)

Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem liczb zespolonych różnych od zera i takim, że $0 < |a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \ldots$ nie mającym skończonego punktu skupienia (równoważnie $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$). Niech

$$E(z, 0) = 1 - z,$$
$$E(z, m) = (1 - z)e^{z+\frac{1}{2}z^2+\cdots+\frac{1}{m}z^m}, \quad m = 1, 2 \ldots$$

Istnieje wtedy ciąg liczb naturalnych $\{m_n\}$ taki, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{m_n+1}$ jest zbieżny dla każdego $z \in \mathbb{C}$, a funkcja f określona wzorem

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}, m_n\right) \tag{1}$$

jest funkcją całkowitą mającą miejsca zerowe dokładnie w punktach $a_1, a_2, \ldots$ (z uwzględnieniem wielokrotności, co oznacza, że funkcja f ma w danym elemencie ciągu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zero rzędu $m \geqslant 1$, wtedy i tylko wtedy, gdy ten element występuje w ciągu m- razy).

W dowodzie twierdzenia Weierstrassa skorzystamy z następującego

Lemat 1. *Dla $m = 0, 1, 2, \ldots$ oraz $|z| < 1$, mamy*

$$|E(z, m) - 1| \leqslant |z|^{m+1}.$$

Dowód. Dla $m = 0$, nierówność jest oczywista. Niech $m \geqslant 1$. Wtedy

$$\begin{aligned} E'(z,m) &= -e^{z+\frac{1}{2}z^2+\cdots+\frac{1}{m}z^m} + e^{z+\frac{1}{2}z^2+\cdots+\frac{1}{m}z^m}\left(1+z+\cdots+z^{m-1}\right)(1-z) \\ &= -e^{z+\frac{1}{2}z^2+\cdots+\frac{1}{m}z^m} + (1-z^m)e^{z+\frac{1}{2}z^2+\cdots+\frac{1}{m}z^m} = -z^m e^{z+\frac{1}{2}z^2+\cdots+\frac{1}{m}}. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że funkcja $-E'(z,m)$ ma w zerze zero rzędu m oraz jej rozwinięcie w szereg Taylora o środku w zerze ma współczynniki nieujemne oraz .

$$1 - E(z,m) = -\int_{[0,z]} E'(\zeta,m)d\zeta.$$

Zatem funkcja

$$h(z) = \frac{1-E(z,m)}{z^{m+1}}$$

ma zerze osobliwość usuwalną i jej wszystkie taylorowskie współczynniki są nieujemne i w konsekwencji dla $|z| < 1$ mamy

$$|h(z)| \leqslant h(|z|) \leqslant h(1) = 1$$

□

Dowód twierdzenia Weierstrassa. Niech $R > 0$ będzie dowolnie ustalone i niech $|a_n| > R$ dla $n \geqslant n_0$. Wtedy z nierówności z ostatniego lematu wynika, że

$$\left|E\left(\frac{z}{a_n}, m_n\right) - 1\right| \leqslant \left|\frac{z}{a_n}\right|^{m_n+1} \leqslant \left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{m_n+1}, \quad n \geqslant n_0.$$

Zauważmy, że szereg $\sum_n \left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{m_n+1}$ jest zbieżny jeśli przyjmiemy np. $m_n = n-1$. Z lematu 5 z ostatniego wykładu wynika więc zbieżność bezwzględna i jednostajna iloczynu

$$\prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}, m_n\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + E\left(\frac{z}{a_n}, m_n\right) - 1\right)$$

w kole $|z| \leqslant R$ Wykazaliśmy więc, że iloczyn (1) jest zbieżny jednostajnie na każdym kole $|z| \leqslant R$, $R > 0$, co oznacza zbieżność niemal jednostajną na $\mathbb{C}$. Ponieważ iloczyny częściowe iloczynu (1) są funkcjami całkowitymi więc iloczyn (1) jest również funkcją całkowitą. □

Z dowodu twierdzenia wynika następujący

Wniosek. *Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem liczb zespolonych różnych od zera nie mających skończonego punktu skupienia, Wtedy funkcja*

$$f(z) = z^p \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}, m_n\right) \quad p \geqslant 1,$$

jest funkcją całkowita f mająca zera w punktach $0, a_1, a_2, \ldots$ (z uwzględnienie wielokrotności).

Przykład. Znaleźć funkcję całkowitą mającą zera dokładnie w punktach $1, 2, 3, \ldots$.

Mamy $a_n = n$, $n = 1, 2, \ldots$ Z dowodu twierdzenia Weierstrassa wynika, że należy znaleźć ciąg $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ taki, że dla dowolnie ustalonego ustalonego $R > 0$ szereg

$$\sum_{n=1} \left(\frac{R}{n}\right)^{m_n+1}$$

jest zbieżny. Łatwo zauważyć, że w tym przypadku można przyjąć ciąg stały $m_n = 1,\ n = 1, 2, \ldots$. Zatem funkcja określona wzorem

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{n}, 1\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}.$$

jest funkcją całkowitą mającą zera dokładnie w punktach $1, 2, 3, \ldots$.

Następujący lemat jest wnioskiem z twierdzenia całkowego Cauchy'ego dla obszarów jednospójnych.

Lemat 2. *Jeśli f jest niezerującą sie funkcją holomorficzną w obszarze jednospójnym $D \subset \mathbb{C}$, to istnieje w obszarze D funkcja g będąca gałęzią logarytmiczną funkcji f $(g = \log f(z))$ tzn g jest funkcją analityczną w D taką, że $e^{g(z)} = f(z)$.*

Dowód. Ponieważ $f(z) \neq 0$ dla $z \in D$, więc funkcja f'/f jest funkcją analityczną w obszarze jednospójnym D. Z twierdzenia całkowego Cauchy'ego dla obszarów jednospójnych i z twierdzenia o istnieniu funkcji pierwotnej (zob. wykład, Podstawy analizy zespolonej) wynika, że funkcja

$$g(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{g'(z)}{g(z)} dz + Log f(z_0),$$

gdzie $z_0 \in D$ jest dowolnie ustalony, a całkowanie jest po dowolnej krzywej zawartej w D o początku w z_0 i końcu z, jest funkcją analityczną oraz $g'(z) = f'(z)/f(z)$. Jeśli $h(z) = f(z)e^{-g(z)}$, to

$$h'(z) = f'(z)e^{-g(z)} - f(z)g'(z)e^{-g(z)} = f'(z)e^{-g(z)} - f(z)\frac{f'(z)}{f(z)}e^{-g(z)} = 0$$

Zatem $h(z) = \text{const}$. Ponieważ

$$h(z_0) = f(z_0)e^{-g(z_0)} = f(z_0)e^{-Log f(z_0)} = 1,$$

więc $f(z)e^{-g(z)} = 1$, $z \in D$. $\square$

Twierdzenie 2. (Twierdzenie Weierstrassa o rozkładzie funkcji całkowitej na iloczyn nieskończony)

Jeśli f jest funkcją całkowitą mającą zerującą się dokładnie w punktach $0, a_1, a_2, \ldots,$ (wypisanych z odpowiednią krotnością), to istnieje funkcja całkowita g taka, że

$$f(z) = z^p e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}, m_n\right) \qquad p \geqslant 0,$$

gdzie p oznacza rząd zera w 0.

Dowód. Z twierdzenia Weierstrassa wynika, że funkcja całkowita

$$h(z) = z^p \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}, m_n\right)$$

ma dokładnie te same same zera (z uwzględnieniem wielokrotności, co funkcja f. Zatem funkcja f/h jest funkcją analityczna na $\mathbb{C}$ (obszarze jednospójnym) a więc na mocy ostatniego lematu istnieje funkcja całkowita g taka, że

$$\frac{f}{h} = e^g.$$

$\square$

Przykład. Funkcja $\sin \pi z$ jest funkcja całkowitą mającą zera rzędu pierwszego w punktach $a_n = n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Można wykazać, że

$$\sin \pi z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Iloczyny Blaschkego

Niech $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Mamy

Twierdzenie 3. *Jeśli ciąg $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$, spełnia warunek*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty,$$

to istnieje funkcja analityczna i ograniczona w $\mathbb{D}$ mająca zera dokładnie w punktach ciągu $\{z_n\}$. W szczególności iloczyn nieskończony

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{-\bar{z}_n}{|z_n|} B_{z_n}(z), \quad B_{z_n}(z) = \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z},$$

jest zbieżny na każdym zbiorze zwartym koła $\mathbb{D}$ do funkcji $B(z)$ zerującej się dokładnie w punktach ciągu $\{z_n\}$.

Dowód. Wystarczy wykazać, że iloczyn

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(1 + \frac{\bar{z}_n}{|z_n|} B_{z_n}(z)\right)\right), \quad B_{z_n}(z) = \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z},$$

jest zbieżny jednostajnie na każdym kole $|z| \leqslant r < 1$. Dla $|z| \leqslant r$ mamy

$$\begin{aligned}
\left|1 + \frac{\bar{z}_n}{|z_n|} |B_{z_n}(z\right| &= \left|1 + \frac{\bar{z}_n}{|z_n|} \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z}\right| \\
&= \left|\frac{|z_n| - |z_n|\bar{z}_n z + \bar{z}_n z - |z_n|^2}{|z_n|(1 - \bar{z}_n z)}\right| \\
&= \left|\frac{|z_n|(1 - |z_n|) + \bar{z}_n z(1 - |z_n|)}{|z_n|(1 - \bar{z}_n z)}\right| \\
&\leqslant \frac{2|z_n|(1 - |z_n|)}{|z_n||1 - \bar{z}_n z|}
\end{aligned}$$

Ponieważ $\lim_{n\to\infty} |z_n| = 1$, istnieje n_0 takie, że $n \leqslant n_0 \implies |z_n| > r$. Wtedy dla $n \geqslant n_0$ oraz $|z| \leqslant r$ mamy

$$\left|1 + \frac{z_n}{|z_n| B_{z_n}(z)}\right| \leqslant \frac{2(1 - |z_n|)}{(1 - r)},$$

co implikuje zbieżność bezwzględną i jednostajną iloczynu

$$\prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{-z_n}{|z_n|} B_{z_n}(z)$$

na kole $|z| \leqslant r$. □

Definicja. *Iloczynem Blaschkego nazywamy funkcję w kole jednostkowym $\mathbb{D}$ postaci*

$$B(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} \frac{-\bar{z}_n}{|z_n|} B_{z_n}(z),$$

przy założeniu, że $0 < |z_1| \leqslant |z_2| \dots$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty$.

Ponieważ granica niemal jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji analitycznych jest funkcją analityczną, więc B jest funkcją analityczną w $\mathbb{D}$ oraz $|B(z)| < 1$ dla $z \in \mathbb{D}$.