Wykład 29.05.2023

Iloczyny nieskończone

Iloczynem nieskończonym o wyrazach $u_n \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots,$

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n = \prod u_n$$

nazywamy ciąg $\{p_n\}$, gdzie $p_n = u_1 u_2 \ldots u_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Mówimy, że iloczyn nieskończony $\prod u_n$ jest zbieżny, jeśli istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geqslant n_0$ mamy $u_n \neq 0$, a ponadto ciąg $\{u_{n_0} u_{n_0+1} \cdot u_{n_0+k}\}$ ma przy $k \to \infty$ skończoną i różną od zera granicę. Jeśli iloczyn nieskończony jest zbieżny, oraz $\lim_{n\to\infty} p_n = p$, to piszemy

$$\prod u_n = p.$$

W szczególności zbieżny iloczyn $\prod u_n = 0$ jeśli co najmniej jeden z jego czynników jest równy 0. Ponieważ dla iloczynu zbieżnego mamy

$$1 = \lim_{k\to\infty} \frac{u_{n_0} u_{n_0+1} \cdots u_{n_0+k}}{u_{n_0} u_{n_0+1} \cdots u_{n_0+k-1}} = \lim_{k\to\infty} u_{n_0+k},$$

więc warunkiem koniecznym zbieżności iloczynu $\prod u_n$ jest

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 1$$

Z tego też względu wygodnie jest zapisywać iloczyny nieskończone w postaci

$$\prod (1 + a_n). \tag{1}$$

Mamy więc, że warunkiem koniecznym zbieżności iloczynu (1) jest $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Lemat 1. *Jeśli $a_n \geqslant 0$, to iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*

Dowód. Zauważmy, że

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leqslant (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) = P_n,$$

Ponadto, ponieważ $e^x \geqslant 1 + x$, $x \geqslant 0$, więc

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leqslant (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \leqslant \exp(a_1) \exp(a_2) \cdots \exp(a_n).$$

Stąd

$$S_n \leqslant P_n \leqslant \exp(S_n). \tag{2}$$

Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny do liczby rzeczywistej S, to P_n jest ciągiem rosnącym, który jest ograniczony od góry (przez e^S), a zatem musi być zbieżny. Odwrotnie, jeśli P_n jest zbieżny do P, to z lewej strony nierówności (2) wynika, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny do wartości nie większej niż P. $\square$

Podobnie

Lemat 2. *Jeśli $a_n \geqslant 0$, $a_n \neq 1$ dla $n \in \mathbb{N}$, to iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*

Dowód(K&N, t. I, zadanie 3.8.4)

Niech dla $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ Log$z$ oznacza gałąź logarytmiczna taką, że Log$z = \log|z| + i$Arg$z$, $-\pi <$ Arg$z < \pi$

Lemat 3. *Jeśli $\mathrm{Re}\, a_n > -1$, $n = 1, 2, \ldots$, to iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} Log(1+a_n)$ jest zbieżny.*

Dowód. Niech $p_n = (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$ i niech $S_n = \mathrm{Log}\,(1+a_1) + \mathrm{Log}(1+a_2) + \ldots \mathrm{Log}(1+a_n)$ Ponieważ $e^{S_n} = p_n$, a więc zbieżność szeregu implikuje zbieżność iloczynu. Załóżmy teraz, że $\lim p_n = p \neq 0$, $p = |p|^{i\alpha}$, $-\pi < \alpha \leqslant \pi$ oraz $p_n = |p_n| e^{i\alpha_n}$, $\alpha - \pi < \alpha_n \leqslant \alpha + \pi$. Przyjmijmy, że $\log p_n = \log|p_n| + i\alpha_n$ oraz $\log p = \log|p| + i\alpha$. Wtedy $\log p_n = S_n + 2k_n\pi i$, gdzie $k_n \in \mathbb{Z}$. Wtedy $S_n - S_{n-1} = \mathrm{Log}(1+a_n) \to 0$, gdyż $a_n \to 0$. Ponadto $\log p_n - \log p_{n-1} = (k_n - k_{n-1})2\pi i \to 0$, co oznacza, że $k_n = k$ dla dostatecznie dużych n oraz $\lim_{n\to\infty} S_n = \log p + 2k\pi i$ $\square$

Mówimy, że iloczyn nieskończony $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$, ($a_n \in \mathbb{C}$) jest zbieżny bezwzględnie jeśli zbieżny jest iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$.

Lemat 4. *Jeśli iloczyn nieskończony jest zbieżny bezwzględnie, to jest zbieżny w zwykłym sensie*

Dowód. Wykażemy najpierw, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\mathrm{Re}\, a_n > -1$, jest zbieżny bezwzględnie wtedy i tyko wtedy, gdy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Log}(1+a_n)$ jest zbieżny bezwzględnie. Jeśli jeden tych szeregów jest zbieżny, to $|a_n| \leqslant 1/2$ dla dostatecznie dużych n. Funkcja $\mathrm{Log}(1+z)$ ma w kole $|z| < 1$ rozwinięcie w szereg Taylora

$$\mathrm{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots = z\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \ldots\right).$$

Zatem

$$\frac{\mathrm{Log}(1+a_n)}{a_n} = 1 - \frac{a_n}{2} + \frac{a_n^3}{3} - \cdots = 1 + A_n,$$

gdzie

$$|A_n| = \left| -\frac{a_n}{2} + \frac{a_n^3}{3} - \dots \right| \leqslant \frac{1}{2}(|a_n| + |a_n|^2 + \dots) = \frac{|a_n|}{2(1-|a_n|)} \leqslant \frac{1}{2},$$

co implikuje, ze dla dostatecznie dużych n

$$\frac{1}{2}|a_n| \leqslant |\mathrm{Log}(1+a_n)| \leqslant \frac{3}{2}|a_n|.$$

Jeśli iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ jest zbieżny bezwzględnie, to zbieżny jest iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$, co z kolei na mocy lematu 1 oznacza zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$. Z pierwszej części dowodu wynika zbieżność bezwzględna szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Log}(1+a_n)$ a więc również jego zbieżność w zwykłym sensie, co na mocy lematu 3 oznacza zbieżność iloczynu $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$.

□

Wykład 5.06.2023

Lemat 5. *Załóżmy, że $\{f_n\}$ jest ciągiem funkcji w zbiorze $D \subset \mathbb{C}$ takim, że $f_n(z) \neq -1$, $z \in D$. Jeśli istnieje ciąg $\{M_n\}$ taki, że*

$$\bigwedge_{z\in D} |f_n(z)| \leqslant M_n$$

oraz szereg $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ jest zbieżny, to iloczyn

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$$

jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie na D.

Dowód. Wykażemy, że ciąg

$$P_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(1+f_k(z))$$

spełnia jednostajnie na D warunek Cauchy'ego. Dla $n > m$ mamy

$$P_n(z) - P_m(z) = \sum_{k=m}^{n-1}(P_{k+1}(z) - P_k(z)) = \sum_{k=m}^{n-1} P_k(z) f_{k+1}(z). \tag{3}$$

Ponadto

$$|P_k(z)| \leqslant \prod_{n=1}^{\infty}(1+|f_n(z)|) \leqslant e^{\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|} \leqslant e^{\sum_{n=1}^{\infty} M_n} = e^M.$$

Z twierdzenia Weierstrassa wynika zbieżność jednostajna szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$, co w szczególności implikuje, że spełniony jest jednostajnie warunek Cauchyego dla ciągu sum częściowych. Zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje n_0 takie, że dla $n, m > n_0$

$$\sum_{k=n}^{m} |f_n(z)| < \varepsilon.$$

Z nierówności (3) wynika, że ciąg $\{P_n(z)\}$ spełnia jednostajnie warunek Cauchy'ego.

Należy jeszcze wykazać, że dla dla $z \in D$,

$$\lim_{n\to\infty} P_n(z) \neq 0.$$

W tym celu zauważmy, że iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + f_n(z))$ jest zbieżny bezwzględnie w każdym punkcie $z \in D$, a więc jest również zbieżny punktowo do niezerującej się funkcji $\square$

Mówimy, że ciąg funkcji $\{f_n\}$ na obszarze $D \subset \mathbb{C}$ jest **niemal jednostajnie zbieżny**, jeśli jest on zbieżny na każdym podzbiorze zwartym obszaru D. Ławo zauważyć, że granica niemal jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji holomorficznych na obszarze D jest też funkcją holomorficzną w tym obszarze. Istotnie, jeśli z jest dowolnym punktem obszaru D, to dla krzywej Jordana $\gamma \subset D$ takiej, że z jest punktem wewnętrznym γ mamy

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \quad n = 1, 2 \ldots.$$

Ponieważ γ jest podzbiorem zwartym, więc ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny jednostajnie na γ, a więc

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta,$$

co oznacza, że $f(z)$ jest całką Cauchy'ego, a więc jest funkcją analityczną w każdym punkcie obszaru.

Twierdzenie 1. (TWIERDZENIE WEIERSTRASSA)

Niech $\{a_n\}$ będzie dowolnym ciągiem liczb zespolonych różnych od zera i takim, że $0 < |a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \ldots$ nie mającym skończonego punktu skupienia (równoważnie $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$). Niech

$$E(z, 0) = 1 - z,$$
$$E(z, m) = (1 - z)e^{z + \frac{1}{2}z^2 + \cdots + \frac{1}{m}z^m}, \quad m = 1, 2 \ldots$$

Istnieje wtedy ciąg liczb naturalnych $\{m_n\}$ taki, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{m_n+1}$ jest zbieżny dla każdego $z \in \mathbb{C}$, a funkcja f określona wzorem

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}, m_n\right) \tag{4}$$

jest funkcją całkowitą mającą miejsca zerowe dokładnie w punktach $a_1, a_2, \ldots$ (z uwzględnienie wielokrotności).

W dowodzie twierdzenia Weierstrassa skorzystamy z następującego

Lemat 6. *Dla $m = 0, 1, 2, \ldots$ oraz $|z| < 1$, mamy*

$$|E(z,m) - 1| \leqslant |z|^{m+1}.$$

Dowód. Dla $m = 0$, nierówność jest oczywista. Niech $m \geqslant 1$. Wtedy

$$\begin{aligned} E'(z,m) &= -e^{z+\frac{1}{2}z^2+\cdots+\frac{1}{m}z^m} + e^{z+\frac{1}{2}z^2+\cdots+\frac{1}{m}z^m}\left(1 + z + \cdots + z^{m-1}\right)(1-z) \\ &= -e^{z+\frac{1}{2}z^2+\cdots+\frac{1}{m}z^m} + (1-z^m)e^{z+\frac{1}{2}z^2+\cdots+\frac{1}{m}z^m} = -z^m e^{z+\frac{1}{2}z^2+\cdots+\frac{1}{m}}. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że funkcja $-E'(z,m)$ ma w zerze zero rzędu m oraz jej rozwinięcie w szereg Taylora o środku w zerze ma współczynniki nieujemne oraz
.

$$1 - E(z,m) = -\int_{[0,z]} E'(\zeta, m)d\zeta.$$

Zatem funkcja

$$h(z) = \frac{1 - E(z,m)}{z^{m+1}}$$

ma zerze osobliwość usuwalną i jej wszystkie taylorowskie współczynniki są nieujemne i w konsekwencji dla $|z| < 1$ mamy

$$|h(z)| \leqslant h(|z|) \leqslant h(1) = 1$$

□

Dowód twierdzenia Weierstrassa. Niech $R > 0$ będzie dowolnie ustalone i niech $|a_n| > R$ dla $n \geqslant n_0$. Wtedy z nierówności z ostatniego lematu wynika, że

$$\left|E\left(\frac{z}{a_n}, m_n\right) - 1\right| \leqslant \left|\frac{z}{a_n}\right|^{m_n+1} \leqslant \left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{m_n+1}, \quad n \geqslant n_0.$$

Zauważmy, że szereg $\sum_n \left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{m_n+1}$ jest zbieżny jeśli przyjmiemy np. $m_n = n-1$. Z lematu 5 wynika więc zbieżność bezwzględna i jednostajna iloczynu

$$\prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}, m_n\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + E\left(\frac{z}{a_n}, m_n\right) - 1\right)$$

w kole $|z| \leqslant R$ Wykazaliśmy więc, że iloczyn (1) jest zbieżny jednostajnie na każdym kole $|z| \leqslant R$, $R > 0$, co oznacza zbieżność niemal jednostajną na $\mathbb{C}$. Ponieważ iloczyny częściowe iloczynu (1) są funkcjami całkowitymi więc iloczyn (1) jest również funkcją całkowitą. $\square$

Z dowodu twierdzenia wynika następujący

Wniosek. *Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem liczb zespolonych różnych od zera nie mających skończonego punktu skupienia, Wtedy funkcja*

$$f(z) = z^p \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}, m_n\right) \qquad p \geqslant 1,$$

jest funkcją całkowita f mająca zera w punktach $0, a_1, a_2, \ldots$ (z uwzględnienie wielokrotności).

Przykład. Znaleźć funkcję całkowitą mającą zera dokładnie w punktach $1, 2, 3, \ldots$.

Mamy $a_n = n$, $n = 1, 2, \ldots$ Z dowodu twierdzenia Weierstrassa wynika, że należy znaleźć ciąg $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ taki, że dla dowolnie ustalonego ustalonego $R > 0$ szereg

$$\sum_{n=1} \left(\frac{R}{n}\right)^{m_n+1}$$

jest zbieżny. Łatwo zauważyć, że w tym przypadku można przyjąć ciąg stały $m_n = 1,\ n = 1, 2, \ldots$. Zatem funkcja określona wzorem

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{n}, 1\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}.$$

jest funkcją całkowitą mającą zera dokładnie w punktach $1, 2, 3, \ldots$.