Wykład 22.05.23 Funkcje harmoniczne c.d.

Następująca własność funkcji harmonicznych nosi nazwę *własności Gaussa* i jest ona konsekwencją wzoru całkowego Cauchy'ego dla funkcji analitycznych.

Twierdzenie 1 (Własność Gaussa)**.** *Jeśli u jest funkcją harmoniczną w obszarze zawierającym koło domknięte $|z - z_0| \leqslant R$, to dla dowolnego $0 < r < R$,*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})dt. \tag{1}$$

Dowód. Ponieważ funkcja u jest harmoniczna w pewnym kole otwartym $|z - z_0| < R + \varepsilon$, gdzie $\varepsilon > 0$, więc istnieje w tym kole funkcja analityczna f taka, że $u = \mathrm{Re} f$. Ze wzoru całkowego Cauchy'ego wynika, że jeśli γ jest dodatnio zorientowanym okręgiem $|z - z_0| = r$ to

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)dz}{z - z_0} dz.$$

Podstawiając w powyższej całce $z = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $dz = ie^{it}dt$ dostajemy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})re^{it}dt}{re^{it}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt$$

i biorąc stronami część rzeczywistą dostajemy wzór (1). $\square$

Wzór całkowy Poissona. Problem Dirichleta dla koła jednostkowego.

Twierdzenie 2 (Wzór całkowy Poissona)**.** *Załóżmy, że funkcja u jest funkcją harmoniczną w obszarze zawierającym koło $|z| \leqslant R$. Wtedy dla $|z| < R$ mamy to*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{it} - z|^2} u(Re^{it})dt$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że wzór jest prawdziwy dla $z = 0$, gdyż wynika on z własności Gaussa dla $z_0 = 0$. Ponieważ funkcja u jest harmoniczna w pewnym kole $|z| < R + \varepsilon$, z twierdzenia z poprzedniego wykładu wynika, że istnieje funkcja f analityczna w tym kole i taka, że $u(z) = \mathrm{Re} f(z)$, (gdyż koło jest obszarem jednospójnym). Wtedy, na mocy wzoru całkowego Cauchy'ego

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad |z| < R \tag{2}$$

Ponadto, ponieważ punkt $z^* = \frac{R^2}{\bar{z}}$ (punkt symetryczny do punktu $z \neq 0$ względem okręgu $|\zeta| = R$, zob. wykład analiza zesp. 1) leży na zewnątrz okręgu okręgu $|\zeta| = R$ jeśli z leży wewnątrz tego okręgu, więc

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z^*}d\zeta = 0.$$

Odejmując ostatnią równość od równości (2) dostajemy

$$\begin{aligned}f(z) =& \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - \frac{R^2}{\bar{z}}}d\zeta\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{\bar{z}f(\zeta)}{\zeta\bar{z} - R^2}d\zeta\right)\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{R^2 - |z|^2}{(\zeta - z)(R^2 - \zeta\bar{z})}f(\zeta)d\zeta.\end{aligned}$$

Podstawiając $\zeta = \zeta(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ dostajemy

$$\begin{aligned}f(z) =& \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2 - |z|^2)iRe^{it}f(Re^{it})dt}{(Re^{it} - z)(R^2 - \bar{z}Re^{it})}\\ =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2 - |z|^2)f(Re^{it})dt}{(Re^{it} - z)(Re^{-it} - \bar{z})} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{it} - z|^2}f(Re^{it})dt\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc równość

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{it} - z|^2}f(Re^{it})dt.$$

Biorąc stronami część rzeczywistą otrzymujemy zapowiedziany wzór. □

Uwaga. Wyrażenie

$$\frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{it} - z|^2} \tag{3}$$

nazywamy jądrem Poissona dla koła $|z| \leqslant R$.

Zauważmy jeszcze, że funkcja stała $u(z) \equiv C$, gdzie $C \in \mathbb{R}$, jest funkcją harmoniczną na całej płaszczyźnie zespolonej, a więc w obszarze zawierającym każde koło domknięte $|z| \leqslant R$, $0 < R < \infty$. Ze wzoru całkowego Poissona wynika więc, że dla dowolnego dodatniego R, mamy

$$C = \frac{C}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{it} - z|^2}dt,$$

co oznacza, że

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{it} - z|^2}dt = 1$$

Jeśli w ostatnim twierdzeniu przyjmiemy $R = 1$, otrzymany następujący wzór **całkowy Poissona dla koła jednostkowego** $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Jeśli funkcja u jest harmoniczna w obszarze zawierającym domknięcie koła jednostkowego $\overline{\mathbb{D}}$, to

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} u(e^{it})dt.$$

Przyjmując w ostatnim wzorze $z = re^{i\theta}$, wzór ten możemy zapisać w postaci

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{|e^{it}-r^{i\theta}|^2} u(e^{it})dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} u(e^{it})dt \tag{4}$$

Problem Dirichleta dla koła jednostkowego $\mathbb{D}$ polega na znalezieniu funkcji harmonicznej w $\mathbb{D}$, ciągłej w $\overline{\mathbb{D}}$ i równej zadanej funkcji ciągłej U na brzegu $\partial\mathbb{D}$. Rozwiązaniem tego problemu zawarte jest w poniższym twierdzeniu, którego dowód pominiemy

Twierdzenie 3. *Niech U będzie funkcją ciągłą na okręgu jednostkowym $\partial\mathbb{D}$. Jeśli*

$$u(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} U(e^{it})dt & dla \quad z \in \mathbb{D} \\ U(z) & dla \quad z \in \partial\mathbb{D} \end{cases},$$

to funkcja u jest harmoniczna w $\mathbb{D}$ oraz ciągła w $\overline{\mathbb{D}}$

Funkcję

$$P(z,\zeta) = \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right) = \frac{1-z|^2}{|\zeta-z|^2}, \quad |z|<1, |\zeta|=1,$$

nazywamy *jądrem Poissona* dla koła jednostkowego $\mathbb{D}$.

Lemat 1. *Własności jądra Poissona $P(z,\zeta)$¿0*

(a) $P(z,\zeta) > 0, (\quad |z| < 1, |\zeta| = 1)$

(b) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,e^{it})dt = 1$

(c) $\sup_{|\zeta-\zeta_0|\geqslant\delta} P(z,\zeta) \to 0,$ *przy* $z \to \zeta_0, |\zeta_0| = 1, \ \delta > 0$

Dowód. (c) Wystarczy zauważyć, że jeśli $|z-\zeta_0|<\delta$, to

$$\sup_{|\zeta-\zeta_0|\geqslant\delta} P(z,\zeta) \leqslant \frac{1-|z|^2}{(\delta-|\zeta_0-z|)^2}.$$

□

Dowód twierdzenia 3. Harmoniczność funkcji u w kole jednostkowym wynika z faktu, że

$$u(z)=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}-z}{e^{it}-z}U(e^{it})dt\right),$$

co oznacza, że u jest częścią rzeczywistą funkcji analitycznej (będącej całką Cauchy'ego funkcji ciągłej).

W celu wykazania ciągłości funkcji u w $\overline{\mathbb{D}}$ zauważmy najpierw, że dla $z\in\mathbb{D}$ oraz $|\zeta_0|=1$ mamy

$$|u(z)-U(\zeta_0)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(z,e^{it})(U(e^{it})-U(\zeta_0)dt\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(z,e^{it})|U(e^{it})-U(\zeta_0)|dt.$$

Z ciągłości funkcji U w punkcie ζ_0 wynika, że dla dowolnego $\varepsilon>0$ istnieje $\delta>0$ takie, że

$$|e^{it}-\zeta_0|<\delta \implies |U(e^{it})-U(\zeta_0)|<\varepsilon.$$

Ponadto z lematu 1 wynika, że istnieje $\delta'>0$ takie, że

$$|z-\zeta_0|<\delta' \implies \sup_{|\zeta-\zeta_0|\geqslant\delta}P(z,\zeta)<\varepsilon.$$

Zatem dla $|z-\zeta_0|<\delta'$ mamy

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(z,e^{it})|U(e^{it})-U(\zeta_0)|dt\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon|U(e^{it})-U(\zeta_0)|dt\leqslant\varepsilon\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|U(e^{it})|dt+|U(\zeta_0)|\right)$$

Z powyższych rozważań wynika, że dla $|z-\zeta_0|<\delta'$,

$$\begin{aligned}
|u(z)-U(\zeta_0| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(z,e^{it})(U(e^{it})-U(\zeta_0))dt\right| \\
&\leqslant \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\{t\in[0,2\pi]:|e^{it}-\zeta_0|\leqslant\delta\}}P(z,e^{it})(U(e^{it})-U(\zeta_0))dt\right| \\
&\quad+\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\{t\in[0,2\pi]:|e^{it}-\zeta_0|>\delta\}}P(z,e^{it})(U(e^{it})-U(\zeta_0))dt\right| \\
&\leqslant \varepsilon\left(1+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|U(e^{it})|dt+|U(\zeta_0)|\right)
\end{aligned}$$