Wykład 8.05.2023 , 15.05.2023

Funkcje harmoniczne

Mówimy, że funkcja rzeczywista $u = u(x, y)$ określona na zbiorze otwartym $D \subset \mathbb{R}^2$ jest harmoniczna na D jeśli ma ona ciągłe pochodne cząstkowe rzędu drugiego ($u \in C^2(D)$) spełniające na D równanie Laplace'a

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

W dalszym ciągu będziemy rozpatrywać funkcje (rzeczywiste) harmoniczne na obszarach $D \subset \mathbb{C}$, przy czym utożsamiamy $\mathbb{R}^2$ z $\mathbb{C}$ przyjmując $(x, y) = x + iy$.

Lemat 1. *Jeśli f jest funkcją analityczną w obszarze $D \subset \mathbb{C}$, to* $\mathrm{Re} f$ oraz $\mathrm{Im} f$ są funkcjami harmonicznymi.

Dowód. Przypomnijmy, że jeśli $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, gdzie $z = x + iy$ oraz $u = \mathrm{Re} f$ i $v = \mathrm{Im} f$ i f jest funkcja analityczną w D, to funkcje u, v spełniają tzw. równania Cauchy-Riemanna (zob. wykład Podstawy analizy zespolonej)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Z ogólnego wzoru całkowego Cauchy'ego wynika, że jeśli f jest funkcją analityczną w D, to w każdym punkcie tego obszaru istnieje pochodna zespolona dowolnego rzędu, co oznacza, że istnieją pochodne cząstkowe dowolnego rzędu funkcji u i v, a więc w szczególności funkcje u, v są klasy $C^2(D)$. Zatem korzystając z równań C-R dostajemy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Ponieważ $u \in C^2(D)$, więc $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ i z równań (1) wynika, ze

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Podobnie dowodzimy harmoniczności u. □

Następne twierdzenie odpowiada na pytanie, czy do danej funkcji u harmonicznej w obszarze płaszczyzny zespolonej istnieje funkcja harmoniczna v taka, ze $f = u+iv$ jest funkcją analityczną na D. Dodajmy, że wtedy funkcje u i v nazywamy *funkcjami harmonicznymi sprzężonymi.* Pokażemy, ze dla obszarów jednospójnych odpowiedź na to pytanie jest pozytywna. Mamy

Twierdzenie 1. *Dla dowolnej funkcji u harmonicznej w obszarze jednospójnym D istnieje funkcja analityczna w D taka, że $u = \mathrm{Re\,f}$*

Dowód. Załóżmy u jest funkcją harmoniczną obszarze jednospójnym D i niech funkcja F będzie funkcją określoną na D wzorem

$$F(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = U + iV.$$

Ponieważ u jest funkcją harmoniczną jest klasy $C^2(D)$, więc funkcje U i V są klasy $C^1(D)$. Zatem

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial V}{\partial y}$$

oraz

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

Widzimy więc, że funkcje U i V spełniają równania Cauchy-Riemanna. Ponieważ funkcje te mają ciągłe pochodne w obszarze D więc funkcja F jest analityczna w obszarze jednospójnym D (zob. wykład Podstawy analizy zespolonej). Wiemy też, że twierdzenie Cauchy'go, które mówi, ze całka po dowolnej krzywej zamkniętej zawartej w danym obszarze z funkcji analitycznej w tym obszarze wynosi zero jest prawdziwe dla obszarów jednospójnych. Z drugiej strony wiemy, że warunek zerowania się całki po każdej krzywej zamkniętej z funkcji ciągłej w danym obszarze jest równoważny istnieniu funkcji pierwotnej (zob. Wykład Podstawy analizy zespolonej str. 21). Istnieje więc funkcja f_1 taka, że $f_1'(z) = F(z)$ dla $z \in D$. Załóżmy, że $f_1 = u_1 + iv_1$. Wtedy mamy

$$f'(z) = \frac{\partial u_1}{\partial x} + i\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y} - i\frac{\partial u_1}{\partial y}$$

Ponadto, ponieważ

$$f'(z) = F(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y},$$

więc

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Zatem $u_1(x, y) = u(x, y) + c$, gdzie c jest stałą rzeczywistą. Widzimy więc, że szukaną funkcją f jest $f = f_1 - c$. □

Wniosek. *Dla dowolnej funkcji u harmonicznej w obszarze jednospójnym D istnieje funkcja g analityczna w D i taka, że $\mathrm{Im\,g = u}$.*

Dowód. Z ostatniego twierdzenia wynika, że istnieje funkcja f analityczna w D i taka, że re$f = u$. Wystarczy więc przyjąć $g = if$. $\square$

Zauważmy, ze w powyższym twierdzeniu założenie jednospójności jest istotne. Funkcja $u(z) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ jest harmoniczna na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (łatwo sprawdzić, ze $\Delta u = 0$). Jednak nie istnieje funkcja analityczna na tym obszarze, której część rzeczywista byłaby równa $u(z)$. Załóżmy, że istnieje taka funkcja g analityczna w $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ i taka, że $\mathrm{Re}g(z) = \log\sqrt{x^2+y^2}$. Ponieważ istnieje gałąź logarytmiczna $f(z) = \log z$ dla $z \in \mathbb{C}\setminus[0,-\infty)$; można ją określić np. wzorem $\log z = \log|z| + iArgz$, gdzie $Argz \in (-\pi,\pi)$, która spełnia warunek $\mathrm{Re}f(z) = \log|z|$, więc na obszarze $\mathbb{C}\setminus[0,-\infty)$ funkcje f i g różniłyby się o stałą urojoną, czyli $g = f + ic$, $c \in \mathbb{R}$. Jednak $f(z)$ nie może być przedłużona na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ nawet jako funkcja ciągła.

Następne twierdzenie jest analogonem następującego twierdzenia Liouville'a dla funkcji analitycznych.

Twierdzenie Liouville'a. *Każda funkcja całkowita i ograniczona redukuje się do stałej.*

Dowód. Załóżmy, ze f jet funkcją całkowitą i niech $M = \sup_{z\in\mathbb{C}}|f(z)| < \infty$.
Ponieważ

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta,$$

to

$$|f'(z)| \leqslant \frac{M}{r} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Zatem $f' \equiv 0$. Dla dowolnie ustalonego a mamy więc

$$f(z) - f(a) = \int_{[a,z]} f'(\zeta)d\zeta = 0.$$

$\square$

Twierdzenie 2. *Każda funkcja harmoniczna i ograniczona na całej płaszczyźnie zespolonej redukuje się do stałej.*

Dowód. Załóżmy, że u jest funkcją harmoniczną i ograniczoną na $\mathbb{C}$. Z ostatniego twierdzenia wynika, że istnieje wtedy funkcja całkowita (analityczna na całej płaszczyźnie zespolonej) i taka, że $\mathrm{Re}f = u$. Wtedy funkcja $g(z) = e^{f(z)}$ jest również funkcją całkowitą. Ponadto, ponieważ $|g(z)| = e^{\mathrm{Re}f(z)} = e^{u(z)}$, więc funkcja g jest ograniczona. Z twierdzenia Liouville'a wynika, że $g \equiv const$. Ponieważ $u(z) = \log|g(z)|$, więc również u jest funkcją stałą. $\square$

Korzystając z zasady maksimum dla funkcji analitycznych wykażemy następującą **zasadę maksimum dla funkcji harmonicznych.**

Twierdzenie 3. *Jeśli funkcja u jest harmoniczna w obszarze D oraz istnieje punkt $\zeta \in D$, w którym funkcja swój kres górny tzn. $u(\zeta) = \sup_{z\in D} u(z)$, to u redukuje się do funkcji stałej.*

Dowód. Załóżmy, że funkcja u jest funkcją harmoniczną w obszarze D i istnieje $\zeta \in D$ takie, że : $u(\zeta) = \sup_{z\in D} u(z) = M < \infty$. Niech $\mathcal{M} = \{\zeta \in D : u(z) = M)\}$. Wykażemy, ze zbiór $\mathcal{M}$ jest zbiorem relatywnie otwartym i domkniętym. Jeśli $\zeta \in \mathcal{M}$, to ponieważ D jest zbiorem otwartym, istnieje $r > 0$ takie, że koło $K(\zeta, r) \subset D$, oraz $u(z) \leqslant u(\zeta)$ dla $z \in K(\zeta, r)$. Ponieważ koło $K(\zeta, r)$ jest obszarem jednospójnym istnieje funkcja f analityczna w tym kole i taka, że $\mathrm{Re} f(z) = u|_{K(\zeta,r)}(z)$. Wtedy funkcja $g(z) = e^{f(z)}$ jest również analityczna w tym kole oraz dla $z \in K(\zeta, r)$ mamy

$$|g(z)| = e^{\mathrm{Re} f(z)} = e^{u(z)} \leqslant e^{u(\zeta)},$$

co oznacza, że $g(z) \equiv const$ na kole $K(\zeta, r)$. Wtedy $u(z) = u(\zeta) = M$ dla wszystkich $z \in K(\zeta, r)$, co dowodzi, że zbiór $\mathcal{M}$ jest zbiorem otwartym. Domkniętość zbioru $\mathcal{M}$ wynika z ciągłości funkcji u. Jeśli $u(z_n) = M$, oraz ciąg $\{z_n\}$ jest zbieżny do punktu $z \in D$, to również $u(z) = M$. Ponieważ D jest zbiorem spójnym, więc albo $\mathcal{M}$ jest zbiorem pustym, albo $\mathcal{M} = D$. □

Dla funkcji harmonicznych prawdziwa jest również następująca **zasada minimum dla funkcji harmonicznych.**

Twierdzenie 4. *Jeśli funkcja u jest harmoniczna w obszarze D oraz istnieje punkt $\zeta \in D$, w którym funkcja swój kres dolny tzn. $u(\zeta) = \inf_{z\in D} u(z)$, to u redukuje się do funkcji stałej.*

Dowód. Wystarczy zastosować zasadę maksimum dla funkcji harmonicznych do funkcji $-u$. □

Wniosek. *Jeśli funkcja u jest funkcją harmoniczną na ograniczonym obszarze $D \subset \mathbb{C}$ i ciągłą na $\overline{D}$, to*

$$\max_{z\in\overline{D}} u(z) = \max_{z\in\partial D} u(z) \quad \textit{oraz} \quad \min_{z\in\overline{D}} u(z) = \min_{z\in\partial D} u(z)$$

Pytanie. Czy funkcja $u(z) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$ jest harmoniczna w kole jednostkowym $|z| < 1$? Czy jest ona częścią rzeczywistą funkcji analitycznej w kole jednostkowym?