Wykład 24.04.2023

Zasada maksimum. Lemat Schwarza.

Twierdzenie 1. *(* ***Zasada maksimum****) Jeśli funkcja f jest analityczna w obszarze D i $f \not\equiv const$, to funkcja $|f|$ w żadnym punkcie obszaru D nie osiąga maksimum lokalnego.*

Dowód. Załóżmy, że f spełnia założenia twierdzenia oraz, że $z_0 \in D$ jest punktem, w którym funkcja $|f|$ osiąga swoje maksimum lokalne. Wtedy istnieje $R > 0$ takie, że jeśli $|z - z_0| \leqslant R$, to

$$|f(z)| \leqslant |f(z_0)|.$$

Ponieważ f jest analityczna, więc jeśli $\overline{K(z_0, R)} \subset D$, to ze wzoru całkowego Cauchy'ego

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) dt.$$

Powyższe równości są również prawdziwe jeśli R zastąpimy przez dowolne r, $0 < r < R$. Ponieważ $f \not\equiv const$, to istnieje punkt $z_0 + r_1 e^{it_0}$, $0 < r_1 < R$, $0 \leqslant t_0 < 2\pi$, dla którego

$$|f(z_0 + r_1 e^{it_0})| < |f(z_0)|.$$

Z ciągłości funkcji $|f|$ wynika, że powyższa nierówność jest również prawdziwa na pewnym łuku okręgu $|z - z_0| = r_1$ zawierającym punkt $z_0 + r_1 e^{it_0}$. Wtedy

$$\begin{aligned}|f(z_0)| &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r_1 e^{it})| dt \\ &< \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| dt = |f(z_0)|,\end{aligned}$$

sprzeczność. □

Wniosek. *Jeśli f jest funkcją analityczną w ograniczonym obszarze $D \subset \mathbb{C}$ oraz ciągłą w domknięciu $\overline{D}$, to funkcja $|f|$ osiąga swoje globalne maksimum na brzegu obszaru D.Ponadto, jeśli f nie jest funkcją stałą, to $|f|$ nie osiąga maksimum (lokalnego) w żadnym punkcie wewnętrznym.*

Dowód. Ponieważ każdy podzbiór domknięty i ograniczony jest zwarty, a funkcja $|f|$ jest funkcją rzeczywistą i ciągła, więc osiąga ona swoje maksimum globalne na $\overline{D}$. Z zasady maksimum wynika, że nie może ona osiągać swojego maksimum wewnątrz D, więc musi ono być osiągnięte na brzegu obszaru D. □

Zauważmy, że w ogólnym przypadku nie jest prawdziwa analogiczna zasada minimum, gdyż istnieją funkcje analityczne np. wielomiany, które nie są funkcjami stałymi w obszarach płaszczyzny zespolonej, ale mają zera w tym obszarze. Np jeśli $f(z) = z^2$, w kole $|z| < r$, to

$$0 = |f(0)| = \min_{|z| \leqslant r} |f(z)| < \min_{|z|=r} |f(z)| = r^2,$$

a więc minimum modułu funkcji analitycznej może być osiągnięte wewnątrz obszaru

Zasada minimum prawdziwa jest dla funkcji niezerujących się w obszarze płaszczyzny zespolonej.

Twierdzenie 2. *(**Zasada minimum**) Jeśli $f \not\equiv const$ jest funkcją analityczną w obszarze D i taką, że $f(z) \neq 0$ dla $z \in D$, to funkcja $|f|$ nie osiąga minimum lokalnego w żadnym punkcie obszaru D.*

Dowód. Zauważmy, ze jeśli $f(z) \neq 0$ dla $z \in D$, to funkcja $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ jest funkcją analityczną w D. Gdyby funkcja $|f|$ osiągała minimum lokalne w pewnym punkcie $z_0 \in D$, to funkcja $|g|$ miałaby w tym punkcie maksimum lokalne, a więc na mocy zasady maksimum g, a więc i f, redukowałaby się do funkcji stałej. Sprzeczność. $\square$

Przykład. Znaleźć

$$\max_{|z|\leqslant 1} |z^2 - z + 1| \quad \text{oraz} \quad \min_{|z|\leqslant 1} |z^2 - z + 1|$$

Z wniosku do zasady maksimum wynika, że

$$\max_{|z|\leqslant 1} |z^2 - z + 1| = \max_{|z|=1} |z^2 - z + 1| = \max_{t\in[0,2\pi]} |e^{2it} - e^{it} + 1| =$$
$$\max_{t\in[0,2\pi]} |e^{it}||e^{it} - 1 + e^{-it}| = \max_{t\in[0,2\pi]} |2\cos t - 1| = 3$$

Zauważmy, ze wielomian $w(z) = z^2 - z + 1$ zeruje się w punktach $\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$, oraz $\left|\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\right| = 1$. Zatem $\min_{|z|\leqslant 1} |z^2 - z + 1| = 0$.

W dowodzie poniższego lematu Schwarza istotną role odgrywa zasada maksimum.

Lemat Schwarza. *Niech $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Jeśli f jest funkcją analityczną w kole $\mathbb{D}$ i taką, że $f(0) = 0$ oraz*

$$|f(z)| \leqslant 1 \quad \text{dla} \quad z \in \mathbb{D},$$

to

$$|f(z)| \leqslant |z| \quad \text{dla} \quad z \in \mathbb{D}$$

oraz

$$|f'(0)| \leqslant 1.$$

Ponadto jeśli $|f(z)| = |z|$ pewnego punktu $z \neq 0$ lub $|f'(0)| = 1$, to $f(z) = e^{i\alpha}z$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dowód. Przy założeniach lematu Schwarza funkcja $F(z) = \frac{f(z)}{z}$ jest analityczna w $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, a w punkcie $z = 0$ funkcja F ma osobliwość pozorną (usuwalną). Istotnie, ponieważ

$$\lim_{z \to 0} F(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = f'(0),$$

funkcję F możemy rozszerzyć (jako funkcję analityczną) na całe koło $\mathbb{D}$ przyjmując $F(0) = f'(0)$.

Stosując zasadę maksimum do funkcji F i koła $|z| \leqslant r < 1$, dostajemy, ze

$$\max_{|z|<r} |F(z)| \leqslant \max_{|z| \leqslant r} |F(z)| = \max_{\theta} |F(re^{i\theta})| = \max_{\theta} \frac{|f(re^{i\theta})|}{r} \leqslant \frac{1}{r}.$$

Przechodząc do granicy z $r \to 1$ otrzymujemy,

$$|F(z)| \leqslant 1,$$

co oznacza, ze $|f(z)| \leqslant |z|$ dla $z \neq 0$ oraz $|f'(0)| \leqslant 1$.

Jeśli, w którejś z powyższych nierówności zachodzi równość w pewnym punkcie, to oznacza to, że $|F|$ osiąga maksimum w tym punkcie, a więc, na mocy zasady maksimum $F(z)$ jest funkcją stałą w $\mathbb{D}$, o module równym 1. Oznacza to, że $F(z) = e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. $\square$

Lemat Schwarza-Picka. *Załóżmy, że funkcja f jest analityczna w kole $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ oraz $|f(z)| \leqslant 1$ dla $z \in \mathbb{D}$. Jeśli $b = f(a)$ dla $a \in \mathbb{D}$, to*

$$|f'(a)| \leqslant \frac{1 - |b|^2}{1 - |a|^2}$$

Dowód. Przypomnijmy, ze dla ustalonego $c \in \mathbb{D}$ funkcja określona wzorem

$$\varphi_c(z) = \frac{z - c}{1 - \bar{c}z}$$

jest homografią przekształcającą koło $\mathbb{D}$ na siebie, przy czym $\varphi_c(0) = -c$ oraz $\varphi_c(c) = 0$. (zobacz wykład z analizy zespolonej 1)

Zatem funkcja

$$g(z) = \varphi_b \circ f \circ \varphi_{-a}(z)$$

spełnia założenia lematu Schwarza, gdyż

$$g(0) = \varphi_b \circ f \circ \varphi_{-a}(0) = \varphi_b(f(a)) = \varphi_b(b) = 0.$$

Ponieważ

$$g(z) = \varphi_b\left(f\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right)\right) = \frac{f\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right) - b}{1 - \bar{b}f\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right)}$$

obliczenia pochodnej i lemat Schwarza pokazują, ze

$$|g'(0)| = \left|\frac{f'(a)(1-|a|^2)}{1-|b|^2}\right| \leqslant 1$$

$\square$

Uwaga. Można również wykazać, ze jeśli

$$|f'(a)| = \frac{1-|b|^2}{1-|a|^2}, \quad b = f(a),$$

to

$$f(z) = f_c(z) = e^{i\alpha}\frac{z-c}{1-\bar{c}z}, \quad |c| < 1.$$