Metody optymalizacji, kolokwium nr 1
Semestr letni 2021

1. Niech $S \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie niepustym zbiorem wypukłym i niech $f : S \to \mathbb{R}$. Epigrafem funkcji f nazywamy zbiór
$$Epi(f) = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R},\ y \geq f(x)\}.$$
Pokazać, że f jest funkcją wypukłą wtedy i tylko wtedy, gdy $Epi(f)$ jest zbiorem wypukłym.

2. Wykazać, że funkcja $f(x) = x \ln x$, $x > 0$, jest wypukła. Korzystając z tego faktu wykazać nierówność
$$x \ln x + y \ln y \geq (x + y) \ln \frac{x + y}{2}, \qquad x, y > 0.$$

3. Dane jest zadanie
$$\max_{x \in X} \ln(x_1 + x_2 + 5),$$
gdzie $X = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 \leq 5, x \geq 0\}$. Rozwiąż je, korzystając z metody gradientowej Kuhna-Tuckera.

4. Dane jest zadanie
$$\min_{x \in X} \left[2x_1 + x_2^3 + x_3^2\right],$$
gdzie
$$X = \left\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : f(x_1, x_2, x_3) \geq 4, x \geq 0\right\},$$
$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + \frac{3}{2} x_2^2 + x_3^2.$$
Rozwiąż to zadanie przez znalezienie punktu siodłowego funkcji Lagrange'a odpowiadającej temu zadaniu.