Metody optymalizacji. Wykład 1

Wprowadzenie

Przedmiot **teorii optymalizacji** stanowi znajdowanie ekstremów funkcji rzeczywistych określonych na zbiorach zadanych liniowymi lub nieliniowymi ograniczeniami (tzn. równościami lub nierównościami). Przedmiot ten jest również często zwany **programowaniem matematycznym**, gdyż w jego zastosowaniach celem rozwiązania zadania optymalizacyjnego jest znalezienie najlepszego planu (programu) pewnych działań. Problemy tego typu mają szerokie zastosowanie poza matematyką, przede wszystkim w organizacji i zarządzaniu (np. logistyce), ekonomii czy finansach.

Z reguły do zadań programowania matematycznego nie stosują się w sposób wygodny znane rezultaty z analizy, co zmusza do poszukiwania nowych metod i narzędzi do ich (dokładnego lub przybliżonego–numerycznego) rozwiązywania. W praktyce często złożoność obliczeniowa rozważanych problemów (np. liczba zmiennych czy ograniczeń na nie) jest tak duża, że do ich rozwiązania trzeba użyć komputerów, co zmusza do znajdowania odpowiednich algorytmów.

W praktycznych zastosowaniach problem optymalizacyjny jest etapem **modelowania matematycznego** interesującego nas obiektu, procesu czy zjawiska. To ostatnie jest złożonym procesem, który można z grubsza podzielić na następujące etapy:

1. *Konstrukcja jakościowego modelu rozpatrywanego problemu*: wydzielanie najistotniejszych czynników (parametrów) rozpatrywanego zjawiska i ustalenie reguł, którym te czynniki podlegają.

2. *Stworzenie modelu matematycznego* - zapis w terminach matematycznych zależności z pierwszego etapu. Na tym etapie konstruuje się tzw. **funkcję celu**, czyli liczbową charakterystykę danego zagadnienia, za pomocą której oceniamy, które rozwiązanie jest lepsze, a które gorsze (tzn. odpowiada lepszej lub gorszej sytuacji rzeczywistej).

3. *Badanie wpływu zmiennych i parametrów na zachowanie się i wartość funkcji celu.* Tu właśnie stosujemy metody optymalizacji: za pomocą aparatu matematycznego znajdujemy ekstrema funkcji celu odpowiadające najlepszej sytuacji rzeczywistej.

4. *Zestawienie (porównanie testowe) rozwiązań otrzymanych w etapie 3 z rzeczywistym modelowanym obiektem czy zjawiskiem.* Jeśli rezultaty są zadowalające, model i wynikające z niego optymalne rozwiązania przyjmuje się. W przeciwnym wypadku idzie się z powrotem do etapu pierwszego i próbuje

poprawić model, następnie do drugiego, i.t.d., aż do uzyskania zadowalających rezultatów.

Klasyfikacja problemów

Dwa główne kierunki/typy zadań w programowaniu matematycznym to:

Zadania deterministyczne - wszystkie informacje, od których zależy modelowane zjawisko, są w pełni znane, nie ma niepewności co do parametrów modelu. Tym właśnie przypadkiem będziemy zajmować się na naszym kursie.

Programowanie stochastyczne - pewne informacje są dla nas w chwili podejmowania decyzji niedostępne lub istnieje niepewność co do niektórych parametrów. Brakujące dane są wtedy modelowane zmiennymi lub procesami losowymi.

Podstawowe działy (deterministycznego) programowania matematycznego:

Programowanie liniowe - funkcja celu jest liniowa, określona na zbiorze zadanym przez ograniczenia (równania czy nierówności) liniowe.

Programowanie nieliniowe - tutaj funkcja celu i/lub warunki określające zbiór, w którym ją optymalizujemy, są nieliniowe. Ważnymi klasycznymi poddziedzinami programowania nieliniowego są:

• **Programowanie wypukłe** - funkcja celu jest wypukła, o ile mamy zadanie minimalizacji, lub wklęsła, jeśli trzeba ją zmaksymalizować. W obu wypadkach zbiór dopuszczalnych rozwiązań jest wypukły.

• **Programowanie kwadratowe** - funkcja celu jest kwadratowa, określona na zbiorze zadanym przez równania czy nierówności liniowe.

• **Zadania wieloekstremalne** - specjalne klasy zadań, często spotykane w zastosowaniach, np. minimalizacja funkcji wklęsłej na zbiorze wypukłym.

• **Programowanie całkowitoliczbowe** - zmienne w zadaniu przyjmują wyłącznie wartości całkowite.

Przykładowe modele i problemy optymalizacyjne

Problem diety

Mamy zadany asortyment produktów. Znamy zawartość w każdym z nich substancji odżywczych: tłuszczów, białka, węglowodanów, i.t.d.. Załóżmy, że jest n różnych produktów i m substancji odżywczych. Przy $i = 1, ..., n$ i $j = 1, ..., m$, wprowadzamy następujące oznaczenia:

a_{ji} - zawartość (w jednostkach masy) j-tej substancji w i-tym produkcie,

b_j - minimalne dobowe zapotrzebowanie człowieka na j-tą substancję,

c_i - cena jednostki masy i-go produktu,

x_i - szukane dobowe zapotrzebowanie na i-ty produkt (tzn. jego ilość w diecie). Oczywiście $x_i \geq 0$.

Problem polega na wyznaczeniu ilości x_i każdego produktu tak, aby pokryć dobowe zapotrzebowanie na wszystkie składniki spożywcze przy jak najniższym koszcie. Minimalizujemy zatem funkcję celu

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{1}$$

przy warunkach

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \geq b_j, \qquad j = 1, ..., m, \qquad\qquad x_i \geq 0, \qquad i = 1, ..., n. \tag{2}$$

Jak widać, jest to zadanie programowania liniowego. Wiele innych interesujących problemów optymalizacyjnych ma postać (1)-(2) lub daje się sprowadzić do tej postaci.

Zadanie transportowe

Trzeba stworzyć plan przewozu jednorodnego ładunku tak, aby ogólny koszt przewozu był minimalny. Mamy

m punktów początkowych (np. fabryk), z których będziemy przewozić towar,

n punktów docelowych (np. hurtowni), do których mamy go przewieźć,

zaś przy $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$,

a_i - ilość towaru w i -tym punkcie początkowym,

b_j - zapotrzebowanie na towar w j -tym punkcie docelowym,

c_{ij} - koszt przewozu jednostki produktu z i-go punktu początkowego do j-go miejsca przeznaczenia,

x_{ij} - ilość towaru przewiezionego z i do j.

Zatem funkcja

$$f(x_{11}, ..., x_{1n}, ..., x_{m1}, ..., x_{mn}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{3}$$

reprezentuje ogólny koszt przewozu,

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ - ilość towaru wywiezionego z punktu początkowego i,

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$ - ilość towaru przywiezionego do miejsca docelowego j.

W najprostszym przypadku mamy warunki

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i = 1, ..., m, \tag{4}$$

(cały towar z każdego punktu startu ma być wywieziony),

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1, ..., n, \tag{5}$$

(całe zapotrzebowanie na ten towar w każdym punkcie ma być zaspokojone, ale bez tworzenia zapasów), i oczywiście

$$x_{ij} \geq 0, \qquad i = 1, ..., m, \quad j = 1, ..., n. \tag{6}$$

Mamy więc znaleźć minimum funkcji celu (3) na zbiorze zadanym warunkami (4)-(6). Problem nosi nazwę **zbilansowanego zadania transportu**. Istotnie, aby istniało jego rozwiązanie, konieczny jest warunek

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{7}$$

tzn. podaż (ilość towaru do wywiezienia) musi być równa popytowi (całkowitemu zapotrzebowaniu na ten towar).

Ogólniej, można rozpatrywać zadanie transportowe nawet gdy warunek (7) nie jest spełniony. Np, gdy

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

(podaż przewyższa popyt), ma sens minimalizacja funkcji celu (3) na zbiorze zadanym warunkami (5)-(6) i

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \qquad i = 1, ..., m,$$

(nie musimy wywozić całego towaru z danego punktu, ale nie możemy z niego wywieźć więcej, niż go tam jest). Zadania tego typu noszą nazwę **niezbilansowanych**.

Zadanie transportowe jest problemem programowania liniowego i można go przedstawić w postaci (1)-(2). W praktyce ze względu na dużą liczbę zmiennych $(m \cdot n)$ i szczególną strukturę ograniczeń stosuje się do niego dedykowane metody (w szczególności tzw. **algorytm transportowy**).

Zauważmy na koniec, że powyższe sformułowanie przy dowolnych *rzeczywistych* x_{ij} spełniających podane ograniczenia ma sens dla towarów podzielnych jak np. woda, paliwo czy jakiś surowiec. W praktyce często mamy do czynienia z towarami niepodzielnymi, jak np. konie czy samochody. Dodajemy wtedy warunek, że x_{ij} (a zatem również a_i, b_j) są liczbami *całkowitymi.* Tak postawiony problem transportowy staje się zadaniem programowania całkowitoliczbowego.

Zadanie o sposobie pracy systemu energetycznego

Rozważmy m elektrociepłowni połączonych liniami przekazu z węzłem energetycznym, w którym skupiona jest moc dostarczana z elektrowni. Należy znaleźć ilość energii dostarczanej przez poszczególne elektrownie, aby generować moc z jak najmniejszym zużyciem paliwa w poszczególnych elektrowniach.

Oznaczmy przez x_i moc generowaną przez i-tą elektrownię. Zakładamy, że

$$\alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, \qquad i = 1, ..., m, \tag{8}$$

gdzie α_i, β_i są danymi liczbami, odpowiadającymi minimalnej i maksymalnej mocy które może (z powodów technologicznych, ekonomicznych, i.t.d.) produkować i-ta elektrownia. Zakładamy również warunek równowagi mocy

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = P + \pi, \tag{9}$$

gdzie P jest sumą zapotrzebowania na moc, a π ogólną sumą strat przesyłu w liniach. Zakładamy, że P i π są danymi stałymi (w szczególności, że π nie zależy od x_i).

Zużycie paliwa na generowanie mocy x_i w i-tej elektrociepłowni jest daną funkcją wypukłą $T_i : [\alpha_i, \beta_i] \to \mathbb{R}$. Mamy więc zminimalizować funkcję celu

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{m} T_i(x_i)$$

przy warunkach (8)-(9). Tak postawiony problem jest zadaniem programowania wypukłego. Jeśli w dodatku funkcje T_i są kwadratowe, mamy zadanie programowania kwadratowego.

Zadanie o rozmieszczeniu

Mamy dane:

m punktów zapotrzebowania na pewien towar, z zadanymi wielkościami zapotrzebowania b_j, $j = 1, ..., m$,

n punktów produkcji tego towaru, przy czym dla i-go punktu produkcji, $i = 1, ..., n$, znana jest funkcyjna zależność kosztu produkcji $f_i = f_i(x_i)$ od wielkości produkcji x_i rozważanego towaru w i-tym zakładzie,

a_{ij} - koszt przewozu jednostki produktu z i-go punktu produkcji towaru do j-go punktu zapotrzebowania, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$.

Zadanie polega na znalezieniu takich wielkości x_{ij} towaru przewożonego z i-go punktu produkcji towaru do j-go punktu zapotrzebowania, a zatem również wielkości $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ produkcji w poszczególnych zakładach, które minimalizują wydatki

$$f(x_{11}, ..., x_{1n}, ..., x_{m1}, ..., x_{mn}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$$

(gdzie pierwsza suma reprezentuje koszty transportu, a druga koszty produkcji), przy warunkach

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1, ..., m, \qquad\qquad x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, ..., n, \quad j = 1, ..., m.$$

Racjonalnym ekonomicznie założeniem jest żądanie wklęsłości funkcji f_i. Oznacza ona, że tzw. marginalny koszt $f_i'(x_i)$ wytworzenia dodatkowej jednostki produktu przy poziomie produkcji x_i jest funkcją malejącą. Istotnie, pewne koszty procesu produkcyjnego (utrzymanie biur, zaprojektowanie produktu, stworzenie linii produkcyjnej, przeszkolenie załogi) są z grubsza niezależne od poziomu produkcji, a inne, np. koszt surowców, rosną mniej więcej liniowo wraz z liczbą sztuk produktu, więc cena jednostkowa produktu powinna maleć przy rosnącej produkcji. Przy tym założeniu postawiony problem staje się zadaniem wieloekstremalnym.