Wykład 6 (3.04.2023)

Zasada argumentu

Jeśli funkcja f jest analityczna w pewnym obszarze $D \subset \mathbb{C}$, z wyjątkiem odosobnionych punktów osobliwych, które są albo punktami pozornie osobliwymi albo biegunami funkcji f, to mówimy, że f jest funkcją **meromorficzną** w D.

Załóżmy teraz, że f jest funkcją meromorficzną w D oraz, że $a \in D$ jest punktem, w otoczeniu którego funkcja f jest analityczna i $f(a) = 0$. Z wcześniejszych wykładów wiemy, że wtedy istnieje kolo otwarte $K(a, r)$ ośrodku w punkcie a i promieniu $r > 0$, takie, że punkt a jest jedynym zerem funkcji f w tym kole. Zatem dla $z \in K(a, r)$

$$f(z) = (z - a)^k g(z),$$

gdzie g jest funkcją niezerującą się w kole $K(a, r)$, a k jest krotnością krotnością punktu zerowego a, tzn $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0$ oraz $f^{(k)}(a) \neq 0$. Ponadto dla $z \in K(a, r)$,

$$f'(z) = k(z - a)^{k-1} g(z) + (z - a)^k g'(z)$$

co implikuje, że

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k(z - a)^{k-1} g(z) + (z - a)^k g'(z)}{(z - a)^k g(z)} = \frac{k}{(z - z_0)} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

i oznacza, że funkcja f'/f ma w punkcie a biegun rzędu pierwszego oraz

$$\text{res}(a, f'/f) = k.$$

Załóżmy teraz, że punkt $b \in D$ jest biegunem rzędu m funkcji f. Wtedy, w pewnym otoczeniu punktu b mamy

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - b)^m},$$

gdzie $h(z)$ jest funkcją analityczną i różną od zera w pewnym otoczeniu b. Zatem podobnie jak powyżej mamy

$$f'(z) = -m(z-b)^{-m-1}h(z) + (z-b)^m h'(z),$$

co implikuje, że

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{z-b} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Z ostatniej równości wynika, że w tym przypadku punkt b jest biegunem rzędu pierwszego funkcji f'/f oraz

$$\mathrm{res}(b, f'/f) = -m.$$

Z powyższych rozważań skorzystamy w dowodzie następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1. *Załóżmy, że f jest funkcją meromorficzną w obszarze jednospójnym D oraz, że krzywa Jordana $\Gamma \subset D$ nie przechodzi ani przez zera ani przez bieguny funkcji f. Jeśli N i P oznaczają odpowiednio ilość zer oraz ilość biegunów funkcji f liczonych wraz z krotnościami,(tzn. zero krotności k jest liczone k-razy, a biegun rzędu m, m-razy) leżących wewnątrz Γ, to*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P.$$

Dowód. Jedynymi izolowanymi punktami osobliwymi funkcji f'/f są bieguny i zera funkcji f. Wystarczy więc zastosować twierdzenie o residuach oraz wyliczone powyżej residua funkcji f'/f.

$\square$

Powyższe twierdzenie nosi nazwę **zasady argumentu**, ze względu na to, że występująca we wzorze całka faktycznie oznacza zmianę argumentu funkcji $f(z)$, gdy z przebiega krzywą zamkniętą Γ. Oczywiście, że zmiana argumentu funkcji $f(z)$, gdy z przebiega krzywą zamkniętą jest wielokrotnością liczby 2π.

Zauważmy, że

$$\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \int_\Gamma (\log f(z))' dz,$$

gdzie $\log f(z)$ oznacza odpowiednio wybraną gałąź logarytmu; tzn. ustalamy punkt $z_0 \in \Gamma$ i wybieramy wartość $\log f(z_0) = \log|f(z_0)| + i \arg f(z_0)$, poprzez ustalenie $\arg f(z_0)$, a następnie tą wybraną gałąź (czyli wartość $\arg f(z_0)$) zmieniamy w sposób ciągły, gdy z przebiega krzywą Γ zaczynając od punktu z_0 (i powracając do tego punktu). Wtedy mamy

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz &= \int_\Gamma (\log f(z))' dz = \log|f(z)|_\Gamma + i \arg f(z)|_\Gamma \\ &= i \arg f(z)|_\Gamma = i\Delta_\Gamma f(z),\end{aligned}$$

gdzie $\Delta_\Gamma f(z)$ oznacza przyrost $\arg f(z)$ wzdłuż Γ.

Uwaga Jeśli w ostatnim twierdzeniu założymy, że f jest funkcją analityczną (zamiast meromorficzną) w obszarze jednospójnym D, to otrzymamy, że

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N,$$

gdzie N oznacza ilość zer funkcji f, liczonych wraz z krotnościami, wewnątrz krzywej Γ. Wykażemy teraz dwa lematy, z których skorzystamy w dowodzie twierdzenia Rouchégo.

Lemat 1. *Jeśli funkcje f i g są analityczne w obszarze jednospójnym D, krzywa Jordana $\Gamma \subset D$ oraz funkcje f i g nie zerują się na Γ, to*

$$\Delta_\Gamma arg f(z)g(z) = \Delta_\Gamma arg f(z) + \Delta_\Gamma arg\, g(z).$$

Dowód. Z zasady argumentu wynika, że

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma arg f(z) = N_f, \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma arg\, g(z) = N_g,$$

gdzie N_f i N_g oznaczają ilość zer wewnątrz Γ odpowiednio funkcji f i g. Z drugiej strony, oczywiście ilość zer iloczynu funkcji równa sie sumie zer każdej z funkcji (jeśli zera liczone są z uwzględnieniem wielokrotności) co możemy zapisać, że $N_{fg} = N_f + N_g$. Zatem mamy

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma arg f(z)g(z) = N_{fg} = N_f + N_g = \frac{1}{2\pi}\left(\Delta_\Gamma arg f(z) + \Delta_\Gamma arg\, g(z)\right)$$

□

Lemat 2. *Załóżmy,że funkcja h jest funkcją analityczną w obszarze zawierającym krzywą Jordana* Γ *wraz z jej wnętrzem. Jeśli* $|h(z)| < 1$ *dla* $z \in \Gamma$, *to*

$$\Delta_\Gamma \arg(1 + h(z)) = 0.$$

Dowód. Zauważmy, że jeśli $|h(z)| < 1$, to

$$\mathrm{Re}(1 + h(z)) > 1 - |h(z)| > 0,$$

co oznacza, że wartości funkcji $w = f(z) = 1 + h(z)$, gdy $z \in \Gamma$, leżą w półpłaszczyżnie $\mathrm{Re} w > 0$ i dlatego gałąź $\arg(1 + h(z))$ zmienia się w sposób ciągły np. z przedziału $(-\pi/2, \pi/2)$, Zatem startując z jakiegoś wybranego punktu z Γ, wykonując obieg wzdłuż krzywej Γ i powracając do tego samego punktu wartość $\arg(1 + h)$ nie zmieni się. Dlatego

$$\Delta_\Gamma \arg(1 + h(z)) = 0.$$

□

Korzystając z powyższych lematów wykażemy następujące

Twierdzenie Rouchégo. *Załóżmy, że krzywa Jordana Γ jest zawarta w obszarze jednospójnym D oraz funkcje f i g są funkcjami analitycznymi w D. Jeśli dla każdego $z \in \Gamma$ spełniona jest nierówność $|g(z)| < |f(z)|$, to funkcje f oraz $f+g$ mają te samą ilość zer (liczonych wraz z krotnościami) wewnątrz Γ.*

Dowód. Zauważmy, że z założeń twierdzenia wynika, że $|f(z)| > 0$ dla $z \in \Gamma$, co oznacza, że $f(z) \neq 0$ oraz $1 + g(z)/f(z) \neq 0$ dla $z \in \Gamma$ (ponieważ $|g(z)|/|f(z)| < 1$). Z równości

$$f(z) + g(z) = f(z)\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right),$$

i z lematu 1 wynika,że

$$\Delta_\Gamma \arg(f(z) + g(z)) = \Delta_\Gamma \arg(f(z)) + \Delta_\Gamma \arg\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right)$$

Ponadto, ponieważ $\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$, to na mocy lematu 2, mamy

$$\Delta_\Gamma \arg\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right) = 0.$$

Zatem

$$N_{f+g} = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg(f(z) + g(z)) = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg(f(z)) = N_f$$

gdzie N_f oznacza ilość zer funkcji f wewnątrz Γ. □

Przykłady.

1.Wykazać, że wszystkie zera wielomianu

$$P(z) = z^5 + 6z^3 + 2z + 10$$

leżą w pierścieniu $1 < |z| < 3$.

2.Wykazać, że wielomian

$$z^4 + 4z - 1$$

ma jeden pierwiastek w kole $|z| < 1/3$ oraz, że pozostałe pierwiastki leżą w pierścieniu $1/3 < |z| < 2$

3. Wykazać, że jeśli $a > e$, to równania równanie $e^z - az^n = 0$ ma n pierwiastków w kole $|z| < 1$.

4. Ile pierwiastków wielomianu

$$z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$$

leży wewnątrz okręgu $|z| = 1$?