Następne twierdzenie jest w pewnym sensie twierdzeniem odwrotnym do twierdzenia, które mówi, że suma szeregu potęgowego jest funkcją analityczną w kole zbieżności.

Twierdzenie Taylora *Załóżmy, że* f *jest funkcja analityczną w obszarze* $D \subset \mathbb{C}$ *oraz* $z_0 \in D$. *Jeśli* $\delta = \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$, *to dla* $|z - z_0| < \delta$

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Dowód. Niech $z \in K(z_0, \delta)$ i niech

$$|z - z_0| < \rho < \delta.$$

Jeśli γ_1 jest dodatnio zorientowanym okręgiem o równaniu : $|\zeta - z_0| = \rho$, to na mocy wzoru całkowego Cauchy'go

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Zauważmy teraz, że ponieważ dla $\zeta \in \gamma_1$ mamy $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1$, to

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - \zeta} &= \frac{1}{z - z_0 + z_0 - \zeta} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n \end{aligned}$$

Zatem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \cdots + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n + R_n(\zeta) \right) d\zeta,$$

gdzie

$$R_n(\zeta) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k = \frac{\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^{n+1}}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

Stąd stosując wzór całkowy Cauchy'ego na n-tą pochodną dostajemy

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2}d\zeta(z-z_0) + \ldots \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta(z-z_0)^n + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}R_n(\zeta)d\zeta \\
&= f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \ldots \\
&+ \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \tilde{R}_n(z, z_0),
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}_n(z, z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)}\frac{\left(\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right)^{n+1}}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\left(\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right)^{n+1}d\zeta
\end{aligned}
$$

Wystarczy więc wykazać, że

$$
\lim_{n\to\infty}\tilde{R}_n(z, z_0) = 0
$$

Niech

$$
M = \max_{\zeta\in\gamma_1}|f(\zeta)|.
$$

Wtedy

$$
\max_{\zeta\in\gamma_1}\left|\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right|^{n+1}\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right| \leqslant \frac{M}{\rho - |z-z_0|}\frac{|z-z_0|^{n+1}}{\rho^{n+1}}.
$$

Zatem

$$
|\tilde{R}_n(z, z_0)| \leqslant \frac{2\pi\rho}{2\pi}\frac{M}{\rho - |z-z_0|}\frac{|z-z_0|^{n+1}}{\rho^{n+1}} = \frac{M}{\rho - |z-z_0|}\frac{|z-z_0|^{n+1}}{\rho^{n}},
$$

ostatnie wyrażenia dąży do zera gdyż $|z-z_0|/\rho < 1$, co kończy dowód.