Wykład 5. (27.03.2023) Zastosowania twierdzenia o residuach do obliczania całek rzeczywistych.

1. **Całki niewłaściwe** $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

Załóżmy, że funkcja f jest analityczna w półpłaszczyźnie $\{z : \mathrm{Im} z > -h\}$, $h > 0$, z wyjątkiem skończonej ilości izolowanych punktów osobliwych $a_1, a_2, \dots, a_n$, $\mathrm{Im} a_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$. Stosując twierdzenie o residuach do krzywej Jordana złożonej z odcinka osi rzeczywistej $[-R, R]$ oraz półokręgu Γ_R :

$$\Gamma_R : \ z(t) = Re^{it}, \quad 0 < t < \pi,$$

dostajemy dla dostatecznie dużych $R > 0$,

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}(a_k; f). \tag{1}$$

Przypomnijmy, że dla funkcji rzeczywistej f określonej na $[a, +\infty)$ definiujemy całkę niewłaściwą $\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx$ i mówimy, że całka ta jest zbieżna jeśli ostatnia granica istnieje i jest skończona. Podobnie definiujemy $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$. Ponadto całkę niewłaściwą w granicach od $-\infty$ do $-\infty$ definiujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

i mówimy, ze całka ta jest zbieżna, jeśli zbieżna jest każda z całek po prawej stronie równości.

Jeśli całka $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna oraz

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0,$$

to biorąc stronami w (1) granicę przy $R \to \infty$, dostajemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}(a_k; f)$$

Przykład 1. Korzystając z twierdzenia o residuach obliczyć

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

Zauważmy najpierw, że ze względu na symetrię funkcji podcałkowej mamy

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^4}.$$

Jeśli $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$, to funkcja f ma 4 odosobnione punkty osobliwe, które są pierwiastkami stopnia 4-tego z liczby -1, czyli $z_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}, k = 0,1,2,3.$ Każdy z tych punktów jest biegunem rzędu pierwszego funkcji f . Korzystając z reguły l'Hospitala, tak jak w wykładzie 4 , dostajemy, że $\mathrm{res}(z_k; f) = \frac{-1}{4}z_k,\ k = 0,1,2,3.$

Następnie widzimy, że $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ oraz $z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ leżą w górnej półpłaszczyźnie, a z_2, z_3 leżą w dolnej półpłaszczyźnie.Zatem dla dostatecznie dużych $R > 0$, mamy

$$\begin{aligned}\int_{-R}^R f(x)dx + \int_{\Gamma_R} f(z)dz &= 2\pi i(\mathrm{res}(z_0; f) + \mathrm{res}(z_1; f))\\ &= -2\pi i\frac{1}{4}(e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{3\pi}{4}})\\ &= \frac{-\pi i}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Pokażemy teraz, że

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$$

Ponieważ długość półokręgu Γ_R wynosi πR, dla $R > 1$ mamy

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)dz\right| \leqslant \pi R \max_{|z|=R}\frac{1}{|1+z^4|} \leqslant \frac{\pi R}{R^4-1} \underset{R\to\infty}{\to} 0$$

Zatem

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

W dowodzie równości $\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$, będziemy korzystać z następującego lematu

Lemat Jordana

$$\int_0^\pi e^{-R\sin\theta}d\theta < \frac{\pi}{R}.$$

Dowód. Z symetryczności funkcji sinus oraz z nierówności $\sin\theta \geqslant \frac{2\theta}{\pi}$ dla $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ wynika, że

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta &= 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} d\theta \leqslant 2\int_0^{\pi/2} e^{-2R\theta/\pi} d\theta \\ &= -\frac{\pi}{R}e^{-R} + \frac{\pi}{R}e^{0} < \frac{\pi}{R}\end{aligned}$$

Przykład 2 Wykazać, że

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2e}$$

Rozważmy funkcję

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}.$$

Jedynymi odosobnionymi punktami osobliwymi tej funkcji są bieguny rzędu pierwszego w punktach i oraz $-i$. Wykażemy najpierw, że $\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$. Dla $R > 1$, mamy

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_R} f(z)dz\right| &= \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)} iRe^{i\theta}}{1+R^2e^{2i\theta}} d\theta\right| \\ &\leqslant \int_0^{\pi} \frac{|e^{iR(\cos\theta+i\sin\theta)}|R}{|1+R^2e^{2i\theta}|} d\theta \\ &\leqslant \int_0^{\pi} \frac{e^{-R\sin\theta}R}{R^2-1} d\theta < \frac{R}{R^2-1}\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta \\ &< \frac{R}{R^2-1}\frac{\pi}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0,\end{aligned}$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z lematu Jordana.

Zatem

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+1} dx \\ &= 2\pi i \operatorname{res}\left(i; \frac{e^{iz}}{1+z^2}\right) = \frac{\pi}{e}\end{aligned}$$

2. **Całki Riemanna**

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta,$$

gdzie $R(u,v)$ jest funkcją wymierną zmiennych u i v.

Ponieważ dla $z = e^{i\theta}$,

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),$$
$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),$$

to

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}.$$

Ostatnia całka może być liczona przy pomocy twierdzenia o residuach.

Przykład 3. Wykazać, że

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Kładąc $z = e^{i\theta}, \theta \in [0,2\pi], d\theta = \frac{dz}{iz}$ oraz $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ widzimy, że

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z\left(4+z+\frac{1}{z}\right)}$$
$$= \frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+4z+1} = \frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{(z-(-2-\sqrt{3}))(z-(-2+\sqrt{3}))}$$

Funkcja $f(z) = \frac{1}{z^2+4z+1}$ ma w kole $|z|<1$ jeden biegun rzędu pierwszego w punkcie $a = -2+\sqrt{3}$ i $\operatorname{res}(a,f) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Zatem

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z\left(4+z+\frac{1}{z}\right)} = \frac{2}{i}2\pi i\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

3. Bardziej skomplikowane przykłady całek rzeczywistych, które można obliczyć za pomocą twierdzenia o residuach, to

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\infty}\sin^2 x dx = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}.$$