Wykład 4 (20.3.2023)

Twierdzenie o residuach. *Załóżmy, że funkcja f jest analityczna w obszarze jednospójnym G z wyjątkiem skończonej ilości odosobnionych punktów osobliwych $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Jeśli $C \subset G$ jest krzywą Jordana taką, że wszystkie punkty $a_1, a_2, \ldots, a_n$ leżą w jej wnętrzu, to*

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}(a_k; f).$$

Dowód. Niech $C_1, C_2, \ldots, C_n$ oznaczają okręgi o środkach odpowiednio w $a_1, a_2, \ldots, a_n$, zawarte we wnętrzu C i o promieniach dostatecznie małych tak, by $C_k \cap C_j = \emptyset$ dla $k \neq j$.

Postępując podobnie jak w poprzednim wykładzie tzn. tworząc odpowiednie krzywe zamknięte złożone z części krzywej C, części okręgów $C_k, k = 1, 2, \ldots n$ oraz nacięć, można wykazać że

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \cdots + \int_{C_2} f(z)dz.$$

Ponieważ dla $k = 1, 2. \ldots, n$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} f(z)dz = \mathrm{res}(a_k; f),$$

otrzymujmy tezę twierdzenia. $\square$

Sposoby obliczania residuów.

1. Wyznaczenie szeregu Laurenta

2. Jeśli a jest biegunem rzędu k funkcji f, to

$$\mathrm{res}(a; f) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to a} \Big((z-a)^k f(z) \Big)^{(k-1)}.$$

Istotnie, jeśli a jest biegunem rzędu k, to

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-a)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-a)} + a_0 + a_1(z-a) + \ldots.$$

Zatem

$$f(z)(z-a)^k = a_{-k} + a_{-k+1}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{k-1} + a_0(z-a)^k + \ldots.$$

Biorąc stronami $(k-1)$ pochodną a następnie granicę przy $z \to a$ otrzymujemy żądany wzór.

Jeśli a jest biegunem rzędu pierwszego, to

$$a_{-1} = \lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

Przy wyznaczaniu residuów często przydatna jest

Reguła de l'Hospitala

Jeśli f i g są funkcjami analitycznymi w otoczeniu punktu z_0 oraz $f(z_0) = g(z_0) = 0$, oraz $g'(z_0) \neq 0$, to

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1}(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \ldots}{g(z_0) + \frac{g'(z_0)}{1}(z-z_0) + \frac{g''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \ldots} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Podobnie, jeśli f i g są funkcjami analitycznymi w otoczeniu punktu z_0 oraz

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$$

oraz

$$g(z_0) = g'(z_0) = \cdots = g^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad g^{(n)}(z_0) \neq 0$$

to

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{g^{(n)}(z_0)}.$$

Przykład 1. Niech

$$f(z) = \frac{1}{z^4 - 1}.$$

Funkcja f ma 4 bieguny rzędu pierwszego w punktach $z_1 = 1,\ z_2 = i,\ z_3 = -1,\ z_4 = -i$. Dla $k = 1, 2, 3, 4$ mamy (stosując regułę de l'Hospitala)

$$
\begin{aligned}
\operatorname{res}(z_k; f) &= \lim_{z\to z_k} f(z)(z-z_k) = \lim_{z\to z_k} \frac{z-z_k}{z^4-1} \\
&= \lim_{z\to z_k} \frac{1}{4z^3} = \frac{z_k}{4z_k^4} = \frac{z_k}{4}
\end{aligned}
$$

Przykład 2. Wykazać, że

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{1-z^{10}} = 0.$$

Niech

$$f(z) = \frac{1}{z^{10}-1}.$$

Jeśli $z_k = e^{\frac{2k\pi i}{10}}$, $k = 0, 1, 2 \ldots 9$, oznaczają pierwiastki zespolone 10-tego stopnia z 1, to

$$
\begin{aligned}
\operatorname{res}(z_k; f) &= \lim_{z\to z_k} f(z)(z-z_k) = \lim_{z\to z_k} \frac{z-z_k}{z^{10}-1} \\
&= \lim_{z\to z_k} \frac{1}{10z^9} = \frac{z_k}{10z_k^{10}} = \frac{z_k}{10}
\end{aligned}
$$

Oczywiście wszystkie punkty z_k, $k = 0, 1, 2 \ldots 9$, leżą we wnętrzu okręgu $|z| = 2$. Mamy więc

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{1-z^{10}} = \frac{2\pi i}{10} \sum_{k=0}^{9} e^{2k\pi i} = 0,$$

gdzie ostatnia równość wynika np. ze wzoru na sumę S_{10} szeregu geometrycznego.

Przykład 3. Obliczyć

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)^n} dz.$$

Punkt $z = 1$ leży wnętrzu okręgu $|z| = 2$, więc

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)^n} dz = 2\pi i \operatorname{res}\left(1; \frac{e^z}{(z-1)^n}\right)$$

Ponieważ funkcja $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^n}$ ma w punkcie 1 biegun rzędu n, więc

$$\operatorname{res}\left(1; \frac{e^z}{(z-1)^n}\right) = \lim_{z\to 1} \frac{1}{(n-1)!}\left(1; \frac{e^z(z-1)^n}{(z-1)^n}\right)^{(n-1)} = \frac{e}{(n-1)!}$$