Płaszczyzną zespoloną (otwartą) $\mathbb{C}$ nazywamy zbiór uporządkowanych par liczb rzeczywistych $z = (x, y)$, w którym zostały określone działania $+$ oraz $\cdot$ w następujący sposób:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Nietrudno sprawdzić, że $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ jest algebraiczny ciałem, tzw. ciałem liczb zespolonych.

Niech $\mathbb{R}$ oznacza ciało liczb rzeczywistych. Każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkowujemy parę $(x, 0)$. Liczby zespolone postaci $(0, y)$ nazywamy liczbami czysto urojonymi, Jeśli przyjmiemy $i = (0, 1)$, to każdą liczbę zespoloną możemy zapisać w postaci $z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$x = \mathrm{Re} z,$$
$$y = \mathrm{Im} z$$

Sprzężeniem liczby zespolonej $z = x + iy$ nazywamy liczbę $\bar{z} = x - iy$. Moduł liczby $z = x + iy$ określony jest wzorem

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Łatwo sprawdzić, że

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}.$$

Jeśli $z \neq 0$, to

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

mamy też

$$\mathrm{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \mathrm{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Własności modułu

- $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \quad$ (nierówność trójkąta),
- $|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||$,
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$,
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad$ (dla $z_2 \neq 0$)

- $|\mathrm{Re} z| \leqslant |z|, \quad |\mathrm{Im} z| \leqslant |z|$,
- $|z| \leqslant |\mathrm{Re} z| + |\mathrm{Im} z|$

Dla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ określmy

$$\arg z = \{\varphi \in \mathbb{R} : \ \mathrm{Re} z = |z| \cos \varphi, \ \mathrm{Im} z = |z| \sin \varphi\}.$$

Jak wiadomo z analizy rzeczywistej zbiór $\arg z$ jest niepusty. Każdy jego element nazywamy argumentem liczby zespolonej z. Każde dwa argumenty liczby z różnią się o całkowitą wielokrotność liczby 2π.

Ćwiczenie. Wykazać, że jeśli $z_1, z_2 \neq 0$ oraz

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1),$$
$$z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

to

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Dla $r > 0$ i $z_0 \in \mathbb{C}$ kołem (otwartym) o środku w z_0 i promieniu r nazywamy zbiór

$$K(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

Zbiór $A \subset \mathbb{C}$ nazywamy **ograniczonym**, jeśli istnieje $r > 0$ takie, że $A \subset K(0, r) = \{z : |z| < r\}$.

Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ oraz $z_1 \neq z_2$. **Odcinkiem o końcach** z_1, z_2 nazywamy zbiór punktów postaci:

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad t \in \mathbb{R}, \ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Zbiór

$$\{z : z = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad t \in \mathbb{R}\}$$

nazywamy **prostą wyznaczoną przez z_1 i z_2.**

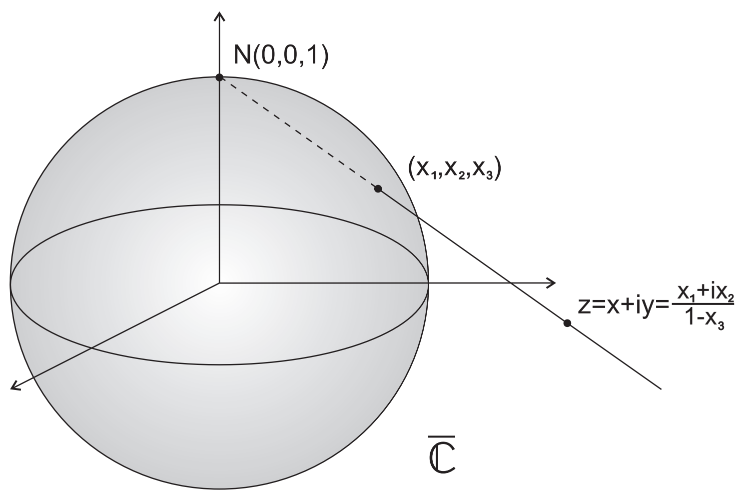
1 Płaszczyzna domknięta. Sfera Riemanna

Płaszczyzna domknięta $\bar{\mathbb{C}}$ powstaje przez dołączenie do płaszczyzny (otwartej) $\mathbb{C}$ jednego punktu ∞. Zatem

$$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Punkty $\bar{\mathbb{C}}$ poprzez rzut stereograficzny mogą być utożsamiane ze sferą w $\mathbb{R}^3$. Niech

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$



Płaszczyznę $\mathbb{C}$ będziemy identyfikować z płaszczyzną $x_3 = 0$. Przez biegun północny $N(0,0,1)$ i punkt $z = x + iy$ prowadzimy prostą. Prosta ta przecina sferę S w punkcie o współrzędnych:

$$x_1 = \frac{2x}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

Na odwrót: mając punkt na sferze S o współrzędnych (x_1, x_2, x_3) prowadzimy przez ten punkt i biegun N prostą; prosta ta przecina płaszczyznę $x_3 = 0$ w punkcie

$$\left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, 0\right),$$

który utożsamiamy z punktem $z = \frac{x_1+ix_2}{1-x_3}$ płaszczyzny $\mathbb{C}$. Biegunowi N przyporządkowujemy punkt ∞.

Na płaszczyźnie domkniętej $\bar{\mathbb{C}}$ odległość między punktami z, z', $d(z,z')$, definiujemy jako odległość euklidesową w $\mathbb{R}^3$ pomiędzy ich obrazami sferycznymi; $d(z,z')$ nazywamy metryką sferyczną. Łatwo sprawdzić, że dla $z, z' \in \mathbb{C}$:

$$d(z,z') = \frac{2|z-z'|}{((1+|z|^2)(1+|z'|^2))^{1/2}}$$

oraz

$$d(z,\infty) = \frac{2}{(1+|z|^2)^{1/2}}.$$

Przestrzeń metryczna $(\mathbb{C}, d)$ jest przestrzenią zwartą.

2 Pochodna funkcji zespolonej i jej interpretacja geometryczna

Niech D będzie zbiorem otwartym płaszczyzny zespolonej $\mathbb{C}$. Mówimy, że funkcja $f : D \to \mathbb{C}$ ma pochodną w punkcie $z_0 \in D$ jeśli istnieje skończona granica:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

Jeśli funkcja f ma pochodną w każdym punkcie zbioru D, to f nazywamy funkcją analityczną (lub holomorficzną) w D. Zbiór wszystkich funkcji holomorficznych w D oznaczamy przez $\mathcal{H}(D)$. Jeśli $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, to mówimy, że f jest funkcją całkowitą.

Dla funkcji holomorficznych prawdziwe są wzory na pochodną sumy, iloczynu, ilorazu oraz na pochodną funkcji złożonej takie same jak na pochodne funkcji rzeczywistych.

Na ogół będziemy zakładać, że dziedziną funkcji jest zbiór otwarty i spójny (obszar) płaszczyzny $\mathbb{C}$.

Załóżmy, że krzywa $\gamma : \ z = z(t), \ t \in [\alpha, \beta]$ jest krzywą klasy C^1 (gładką) zawartą w obszarze D, zaś $f \in \mathcal{H}(D)$. Wtedy obrazem krzywej γ poprzez funkcję f jest krzywa $f \circ \gamma$ o równaniu: $w = f(z(t), \ t \in [\alpha, \beta]$. Ponadto mamy

$$(f \circ z)'(t) = f'(z(t))z'(t).$$

Jeśli $z_0 = z(t_0)$ oraz $f'(z_0) \neq 0$, to oczywiście mamy:

$$(f \circ z)'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0),$$

przy czym lewa strona tej równości przedstawia wektor styczny do krzywej $f(\gamma)$ w punkcie $w_0 = f(z_0)$, a prawą stronę tej równości możemy interpretować jako wektor na płaszczyźnie, którego argument wynosi

$$\arg f'(z_0) + \arg z_0.$$

Jeśli więc $f'(z_0) \neq 0$, to $\arg f'(z_0)$ można interpretować jako kąt lokalnego obrotu przy odwzorowaniu f krzywych przechodzących przez punkt z_0

Z powyższej interpretacji argumentu pochodnej zespolonej wynika fakt zachowanie kątów pomiędzy krzywymi przy odwzorowaniach realizowanych przez funkcje analityczne. Jeśli rozpatrzymy dwie krzywe regularne γ_1, γ_2 zawarte w obszarze D i przecinające się w punkcie z_0, a funkcja analityczna f w D ma niezerującą się w tym obszarze pochodną, to krzywe $f(\gamma_1)$, $f(\gamma_2)$ będą krzywymi regularnymi przecinającymi się w punkcie $w_0 = f(z_0)$, przy czym styczne do tych krzywych w tym punkcie powstaną poprzez obrót stycznych do γ_1 i γ_2 w punkcie z_0 o ten sam kąt równy $\arg f'(z_0)$. Ponieważ kąt między dwiema krzywymi przecinającymi się jest kątem między ich stycznymi w punkcie przecięcia, to kąt między krzywymi γ_1, γ_2 w z_0 jest taki sam jak kąt między krzywymi $f(\gamma_1)$, $f(\gamma_2)$ w punkcie $f(z_0)$. Wykazaliśmy więc następującą własność funkcji holomorficznych:

Jeśli f jest funkcją analityczną w obszarze D o pochodnej stale różnej od zera, to odwzorowanie$f$ zachowuje kąty między krzywymi

Odwzorowania różnowartościowe w obszarze D zachowujące kąty między krzywymi nazywamy **odwzorowaniem konforemnym.**

Wielkość $|f'(z_0)|$ ma również prostą interpretację geometryczną. Ponieważ

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|},$$

a wielkość $|f(z) - f(z_0)|$ oznacza odległość obrazów punktów z i z_0 poprzez funkcję f, to $|f'(z_0)|$ oznacza lokalną deformację odległości w punkcie z_0; zauważmy, że deformacja ta jest niezależna od kierunku.

3 Równania Cauchy-Riemanna

Z istnienia pochodnej w punkcie z funkcji zespolonej $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$, $z = x+iy$, można otrzymać dwa równania charakteryzujące część rzeczywistą i urojoną funkcji f. Równania te noszą nazwę równań Cauchy-Riemanna (C-R). Pochodna funkcji f w punkcie z wyraża się wzorem

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Jeśli h dąży do zera wzdłuż osi rzeczywistej, czyli po prostu w powyższym wzorze $h \in \mathbb{R}$, to

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} + i\frac{v(x+h,y) - v(x,y)}{h} \right) \\ &= u'_x(x,y) + iv'_x(x,y) \end{aligned}$$

Natomiast jeśli h dąży do zera wzdłuż osi urojonej, tzn. $h = ik,\ k \in \mathbb{R}$, to

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(z+ik) - f(z)}{ik} \\ &= \lim_{k\to 0} \left(\frac{u(x,y+k) - u(x,y)}{ik} + i\frac{v(x,y+k) - v(x,y)}{ik} \right) \\ &= v'_y(x,y) - iu'_y(x,y) \end{aligned}$$

Porównując otrzymane wyrażenia dostajemy tzw. równania Chauchy-Riemanna (C-R):

$$\begin{aligned} u'_x(x,y) &= v'_y(x,y) \\ u'_y(x,y) &= -v'_x(x,y) \end{aligned}$$

Zatem jeśli funkcja $f = u + iv$ jest holomorficzna w obszarze D płaszczyzny zespolonej, to w obszarze tym spełnione są równania C-R. Równania te, nie są na ogół warunkiem dostatecznym istnienia pochodnej zespolonej. Są one również warunkiem dostatecznym przy dodatkowym założeniu ciągłości pochodnych cząstkowych funkcji u i v.

4 Homografie

Homografią (przekształceniem Möbiusa) nazywamy funkcję $h : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ określoną wzorem

$$h(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{dla } z \in \mathbb{C}, z \neq -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & \text{dla } z = \infty \\ \infty & \text{dla } z = -\frac{d}{c}, \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ oraz $c \neq 0$. Jeśli $c = 0$, to $d \neq 0$, gdyż $ad - bc \neq 0$ a funkcja określona wzorem (1) jest postaci

$$h(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = Az + B,$$

czyli jest funkcją liniową . W tym przypadku mamy też: $h(\infty) = \infty$.

Własności homografii

1) Przekształcenie homograficzne jest różnowartościowym, ciągłym przekształceniem płaszczyzny domkniętej $\bar{\mathbb{C}}$ na siebie.
2) Zbiór wszystkich przekształceń homograficznych tworzy grupę, jeśli za działanie grupowe przyjmiemy składanie przekształceń.
3) Jeśli dane są trzy punkty $z_1, z_2, z_3 \in \bar{\mathbb{C}}$ oraz $w_1, w_2, w_3 \in \bar{\mathbb{C}}$, to istnieje dokładnie jedna homografia h taka, że $h(z_k) = w_k$, $k = 1, 2, 3$.

Dowód własności 3) Załóżmy, że żaden z punktów z_k, w_k nie ∞ i niech

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

gdzie $ad - bc \neq 0$, oraz $h(z_k) = w_k$, $k = 1, 2, 3$. Ponieważ

$$w - w_k = \frac{(z - z_k)(ad - b)}{(cz + d)(cz_k + d)}, \quad k = 1, 2, 3,$$

to

$$\frac{w - w_2}{w - w_3} = \frac{(cz_3 + d)(z - z_2)}{(cz_2 + d)(z - z_3)}$$

oraz

$$\frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3} = \frac{(cz_3 + d)(z_1 - z_2)}{(cz_2 + d)(z_1 - z_3)}.$$

Zatem dostajemy

$$\frac{w-w_2}{w-w_3}\cdot\frac{w_1-w_3}{w_1-w_2}=\frac{z-z_2}{z-z_3}\cdot\frac{z_1-z_3}{z_1-z_2}.$$

Wyliczając z ostatniej równości w wyznaczamy w sposób jednoznaczny homografię h.

Jeśli np. $z_3=\infty$, to przyjmujemy

$$\frac{w-w_2}{w-w_3}\cdot\frac{w_1-w_2}{w_1-w_3}=\frac{z-z_2}{z_1-z_3}$$

i podobnie traktujemy pozostałe przypadki.

Definicja. *Wyrażenie*

$$(z_1,z_2,z_3,z_4)=\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}:\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}$$

nazywamy dwustosunkiem czterech (różnych) punktów.

Zauważmy, że z powyższych rozważań wynika, że dwustosunek (z_1,z_2,z_3,z_4) jest obrazem punktu z_1 poprzez homografię przeprowadzającą punkty z_2,z_3,z_4 odpowiednio na punkty $1,0,\infty$. Rzeczywiście homografia taka jest określona wzorem

$$(z,z_2,z_3,z_4)=(w,1,0,\infty)=\frac{w-0}{-\infty}\cdot\frac{1-\infty}{1-0}=w.$$

Mamy więc następującą własność homografii:

4) Dwustosunek czterech punktów jest niezmiennikiem homografii, tzn

$$(z_1,z_2,z_3,z_4)=(h(z_1),h(z_2),h(z_3),h(z_4)).$$

5) Każda homografia jest złożeniem przekształceń liniowych i odwrotności.

Istotnie, przy założeniu $c\neq 0$ mamy:

$$h(z)=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cz+d}.$$

Ponieważ przy rzucie stereograficznym zarówno okręgom jak i prostym na płaszczyźnie $\mathbb{C}$ odpowiadają okręgi na sferze Riemanna, to okręgiem na

$\bar{\mathbb{C}}$ (albo okręgiem w szerszym sensie) będziemy nazywać dowolny okrąg lub prostą na $\mathbb{C}$.

Następna własność jest wnioskiem z własności 5)

6) Homografie przekształcają okręgi na $\bar{\mathbb{C}}$ na okręgi na $\bar{\mathbb{C}}$.

Ponadto mamy

Wniosek 1. *Dwustosunek czterech punktów jest liczbą rzeczywistą wtedy i tylko wtedy, gdy punkty te leżą na jednej prostej lub na jednym okręgu.*

Punkty symetryczne

Definicja. *Mówimy, że punkty z i $z*$ są symetryczne względem okręgu A na $\bar{\mathbb{C}}$ przechodzącego przez punkty z_1, z_2, z_3 wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(z*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)} \tag{2}$$

Zauważmy, że jeśli $z \in A$, to $z* = z$.

Można również wykazać, że powyższa definicja punktów symetrycznych zależy tylko od okręgu A, a nie zależy od wyboru punktów z_1, z_2, z_3 tego okręgu.

Załóżmy najpierw, że A jest prostą na $\mathbb{C}$. Wtedy możemy przyjąć np $z_3 = \infty$ i równanie (2) zapisać zapisać w postaci

$$\frac{z * - z_2}{z_1 - z_2} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_2}{\bar{z_1} - \bar{z}_2}.$$

Stąd wynika , że

$$|z * - z_2| = |z - z_2|$$

oraz

$$\mathrm{Im}\frac{z * - z_2}{z_1 - z_2} = -\mathrm{Im}\frac{z - z_2}{z_1 - z_2}, \qquad \mathrm{Re}\frac{z * - z_2}{z_1 - z_2} = \mathrm{Re}\frac{z - z_2}{z_1 - z_2}.$$

Z ostatniej równości wynika, że

$$\mathrm{Re}\frac{z * - z}{z_1 - z_2} = 0,$$

co oznacza, że

$$\frac{z*-z}{z_1-z_2}=it, \quad t\in\mathbb{R},$$

czyli

$$\arg(z*-z)=\frac{\pi}{2}+\arg(z_1-z_2).$$

Z rozważań tych wynika więc, że punkty z i $z*$ są symetryczne w zwykłym sensie względem prostej przechodzącej przez punkty z_1 i z_2, tzn punkty $z, z*$ leżą na prostej prostopadłej do prostej przechodzącej przez punkty z_1 i z_2 w jednakowej odległości od tej prostej.

Załóżmy teraz, że A jest okręgiem wyznaczonym przez trzy niewspółliniowe punkty z_1, z_2, z_3 o równaniu: $|z-a|=R$. Wtedy, korzystając z niezmienniczości dwustosunku przy odwzorowaniach homograficznych dostajemy

$$\begin{aligned}(z*, z_1, z_2, z_3) &= \overline{(z, z_1, z_2, z_3)} = (\bar z, \bar z_1, \bar z_2, \bar z_3)\\ &(\bar z-\bar a, \bar z_1-\bar a, \bar z_2-\bar a, \bar z_3-\bar a) = \left(\frac{R^2}{\bar z-\bar a}, z_1-a, z_2-a, z_3-a\right)\\ &= \left(\frac{R^2}{\bar z-\bar a}+a, z_1, z_2, z_3\right).\end{aligned}$$

Stąd wynika, że punkt symetryczny do z względem okręgu $|z-a|=R$ wyraża się wzorem

$$z*=\frac{R^2}{\bar z-\bar a}+a.$$

7) **Zasada symetrii.** Jeśli homografia przeprowadza okrąg w szerszym sensie Γ na okrąg (w szerszym sensie) $\tilde\Gamma$, to punkty symetryczne względem okręgu Γ są przekształcane na punkty symetryczne względem okręgu $\tilde\Gamma$.

Dowód własności 7) Niech $z_1, z_2, z_3\in\Gamma$ i niech $z, z*$ będą punktami symetrycznymi względem Γ. Wtedy $h(z_1), h(z_2), h(z_3)\in h(\Gamma)=\tilde\Gamma$ oraz mamy

$$\begin{aligned}(h(z*), h(z_1), h(z_2), h(z_3)) &= (z*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}\\ &= \overline{(h(z), h(z_1), h(z_2), h(z_3))}\\ &= ((h(z))*, h(z_1), h(z_2), h(z_3)),\end{aligned}$$

co oznacza, że $h(z*)=(h(z))*$.

Przykład. Znaleźć homografie h przeprowadzające okrąg jednostkowy $|z| = 1$ na siebie i takie, że $h(z_0) = 0$, $|z_0| < 1$.

Ze wzoru na punkty symetryczne względem okręgu $|z| = 1$ wynika, że punkt symetryczny do z_0 wyraża się wzorem $z_0* = \frac{1}{\bar{z_0}}$. Ponieważ $h(z_0) = 0$, to $h\left(\frac{1}{\bar{z_0}}\right) = \infty$ (gdyż punktem symetrycznym do środka okręgu jest ∞). Zatem

$$h(z) = A\frac{z - z_0}{z - \frac{1}{\bar{z_0}}} = -A\bar{z_0}\frac{z - z_0}{1 - \bar{z_0}z}.$$

Ponadto homografia h spełnia warunek

$$|h(e^{i\theta})| = 1,$$

co oznacza, że

$$\left|-A\bar{z_0}\frac{e^{i\theta} - z_0}{1 - \bar{z_0}e^{i\theta}}\right| = \left|-A\bar{z_0}e^{i\theta}\frac{1 - e^{-i\theta}z_0}{1 - \bar{z_0}e^{i\theta}}\right| = |-A\bar{z_0}e^{i\theta}| = 1.$$

Możemy więc przyjąć, że $-A\bar{z_0} = e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ i ogólną postać homografii przekształcających koło jednostkowe na siebie zapisać w postaci:

$$h(z) = e^{i\alpha}\frac{z - z_0}{1 - \bar{z_0}z}, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ |z_0| < 1.$$

5 Szeregi potęgowe

W przestrzeni $\mathbb{C}$ z metryką $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, która jest właściwie metryką euklidesową na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, możemy rozpatrywać ciągi $\{a_n\}$ jak i szeregi $\sum a_n$ o wyrazach zespolonych. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy zbieżnym jeśli istnieje skończona granica ciągu $\{S_n\}$, gdzie $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Dwa poniższe twierdzenia (znane z analizy rzeczywistej) prawdziwe są również dla szeregów o wyrazach zespolonych.

Twierdzenie. *Jeśli szereg $\sum a_n$, $a_n \in \mathbb{C}$ ma zbieżną majorantę, tzn $|a_n| \leqslant A_n$ i $\sum A_n < \infty$, to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny bezwzględnie.*

Twierdzenie. **(Mertensa)** *Jeśli szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ są zbieżne, przy czym co najmniej jeden z nich jest zbieżny bezwzględnie i ich sumy są równe* *odpowiedni A i B, to szereg*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n, \qquad \textit{gdzie} \;\; c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$$

jest zbieżny i jego suma wynosi AB

Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ występujący w powyższym twierdzeniu nazywamy iloczynem Cauchy'ego szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Definicja. *Szeregiem potęgowym o środku w punkcie $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy szereg postaci*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad a_n \in \mathbb{C}, \;\; n = 0, 1, \ldots. \tag{3}$$

Twierdzenie. *Niech będzie dany szereg potęgowy postaci (3). Istnieje wtedy $R \in [0, \infty]$ takie, że*

(a) szereg (3) jest zbieżny bezwzględnie w kole $\{z : |z - z_0| < r\}$ i jednostajnie zbieżny w kole $\{z : |z - z_0| < \rho\}$, $\rho < R$,

(b) ciąg $\{|a_n||z - z_0|^n\}$ jest nieograniczony dla $|z - z_0| > R$,

(c)

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Dowód. Niech

$$R = \sup\{r : r \in [0, \infty) : \text{ ciąg } r^n |a_n| \text{ jest ograniczony}\}.$$

Jeśli więc $|z - z_0| > R$, to z definicji supremum wynika, że ciąg

$$\{|a_n||z - z_0|^n\}$$

jest nieograniczony.

Jeśli $|z - z_0| < R$, to istnieje r takie, że $|z - z_0| < r < R$ i ciąg $\{|a_n|r^n\}$ jest ograniczony np. przez M, czyli

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} |a_n|r^n \leqslant M.$$

Wtedy

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n|r^n \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^n \leqslant M \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^n,$$

co oznacza zbieżność bezwzględną w kole $|z - z_0| < R$.

Jeśli $|z - z_0| < \rho < R$, to biorąc r takie, że $\rho < r < R$ mamy

$$|a_n(z - z_0)^n| \leqslant M \left(\frac{\rho}{r} \right)^n,$$

co oznacza zbieżność jednostajna w kole $|z - z_0| < \rho$.

Jeśli $0 < r < R$, to

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} |a_n|r^n \leqslant M(r) \in (0, \infty).$$

Zatem

$$|a_n|^{1/n} \leqslant \frac{1}{r}(M(r))^{1/n}.$$

Przechodząc do granicy $n \to \infty$ otrzymujemy

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{1}{r}.$$

Ponieważ ostatnia nierówność jest prawdziwa dla wszystkich $r \in (0, R)$, to

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{1}{R}. \tag{i}$$

Jeśli $R = +\infty$, to z powyższej nierówności wynika natychmiast równość.

Jeśli $R < \infty$, to dla $r > R$, ciąg $|a_n|r^n$ jest nieograniczony, a więc w szczególności nieskończenie wiele wyrazów tego ciągu jest większych niż 1, co oznacza, że

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geqslant \frac{1}{r} \qquad \text{dla } r > R.$$

Zatem

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geqslant \frac{1}{R}. \tag{ii}$$

Ostatecznie (i) i (ii) dają

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}.$$

□

Twierdzenie. *Jeśli szereg potęgowy* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *ma dodatni promień zbieżności* R*, to funkcja*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

jest określona w kole $K(z_0, R) = \{z : |z-z_0| < R\}$ *i ma w tym kole pochodną*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(z-z_0)^{n-1}.$$

Dowód. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że $z_0 = 0$. Załóżmy więc, że

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < R.$$

Niech

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \quad |z| < R.$$

Niech $w \in K(0, R)$ będzie dowolnie ustalone. Wtedy dla $z \in K(0,R) \setminus \{w\}$ mamy

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{z^n - w^n}{z-w} - n w^{n-1} \right).$$

Wyrażenie w ostatnim nawiasie $= 0$ dla $n = 1$. Natomiast dla $n \geqslant 2$ mamy

$$\begin{aligned}
\frac{z^n - w^n}{z - w} - nw^{n-1} &= z^{n-1} + wz^{n-2} + \cdots + w^{n-1} - nw^{n-1} \\
&= (z^{n-1} - w^{n-1}) + (wz^{n-2} - w^{n-1}) + \cdots + (zw^{n-2} - w^{n-1}) \\
&= (z - w)\Big((z^{n-2} + wz^{n-3} + \cdots + w^{n-2}) \\
&+ w(z^{n-3} + wz^{n-4} + \cdots + w^{n-3}) + \cdots + w^{n-1})\Big) \\
&= (z - w)(z^{n-2} + 2wz^{n-3} + 3w^2z^{n-4} + \cdots + (n-1)w^{n-1}) \\
&= (z - w)\sum_{k=1}^{n-1} kw^{k-1}z^{n-k-1}
\end{aligned}$$

Jeśli ponadto $z, w \in K(0, r),\ 0r < R$, to

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1} kw^{k-1}z^{n-k-1}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} kr^{k-1}r^{n-k-1} = r^{n-2}\frac{n(n-1)}{2}$$

. Zatem

$$\left|\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w)\right| \leqslant \frac{|z - w|}{2}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n|r^{n-2}. \tag{i}$$

Ponieważ promień zbieżności szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2}$ wynosi R, to dla $0 < r < R$ suma szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n|r^{n-2}$ jest skończona. Ostatecznie przechodząc w nierówności (i) do granicy przy $z \to w$ otrzymujemy, że pochodna $f'(w)$ istnieje i jest równa $g(w)$. $\square$

6 Funkcja wykładnicza

Funkcję wykładniczą $z \mapsto e^z$ określamy wzorem

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Ponieważ promień zbieżności powyższego szeregu potęgowego wynosi ∞, to funkcja wykładnicza jest określona i ma pochodną na całej płaszczyźnie $\mathbb{C}$.

Funkcja wykładnicza e^z ma następujące własności:

1) $(e^z)' = e^z$

2)
$$\bigwedge_{z_1, z_2 \in \mathbb{C}} e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

3)
$$e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow \frac{z_1 - z_2}{2\pi i} \text{ jest liczbą całkowitą.}$$

4) funkcja wykładnicza zawężona do zbioru liczb rzeczywistych jest funkcją ściśle rosnącą oraz odwzorowuje $\mathbb{R}$ na $(0, +\infty)$,

5) dla $t \in \mathbb{R}$ mamy: $e^{it} = \cos t + i \sin t$.

6) funkcja e^z odwzorowuje $\mathbb{C}$ na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Dowód 1). Z twierdzenia o pochodnej szeregu potęgowego wynika, że

$$\begin{aligned}(e^z)' &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)!} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} z^n = e^z.\end{aligned}$$

Dowód 2). Stosując twierdzenie Mertensa o iloczynie Cauchy;ego szeregów otrzymujemy:

$$\begin{aligned}e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z_1 + z_2)^n = e^{z_1 + z_2}\end{aligned}$$

Dowód 4). Ponieważ $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$, to dla $x \in \mathbb{R}$ mamy $e^x \in \mathbb{R}$. Ponadto jeśli $x > 0$, to

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.1 + x,$$

a więc $\lim_{x\to\infty} e^x = +\infty$. Ponadto, na mocy własności 2)

$$e^t.e^{-t} = e^0 = 1.$$

Zatem

$$e^{-t} = \frac{1}{e^t}$$

oraz $\lim_{t\to-\infty} e^t = 0$.

Z własności 2) wynika również, że $e^z \neq 0$ dla $z \in \mathbb{C}$. Rzeczywiście, gdyby $e^z = 0$ dla pewnego $z \in \mathbb{C}$, to ponieważ $e^z \cdot e^{-z} = 1$, dostalibyśmy sprzeczność.

Jeśli $x \in \mathbb{R}$,to jak pokazaliśmy $e^x \in \mathbb{R}$, ale mamy też

$$e^x = e^{\frac{x}{2}} \cdot e^{\frac{x}{2}} = (e^{\frac{x}{2}})^2 > 0,$$

co oznacza, że $e^x > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$. Ponadto ponieważ obraz $\mathbb{R}$ poprzez funkcję e^x jest zbiorem spójnym, to z powyższych rozważań wynika, że jest on przedziałem $(0, \infty)$. W końcu ponieważ $(e^x)' = e^x > 0$, to e^x jest funkcją ściśle rosnącą na $\mathbb{R}$.

Dowód 5). Podstawiając $z = it$, $t \in \mathbb{R}$, dostajemy

$$e^{it} = 1 + \frac{it}{1!} - \frac{t^2}{2!} - \frac{it^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{it^5}{5!} - \dots.$$

Zatem

$$\mathrm{Re}(e^{it}) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots = \cos t$$

oraz

$$\mathrm{Im}(e^{it}) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots = \sin t.$$

Uwaga. Dla $z = x + iy$ mamy

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y),$$

a więc $|e^z| = e^x$ oraz $\arg e^z = y$.

Z okresowości funkcji trygonometrycznych sin i cos wynika, że dla dowolnej liczby całkowitej k mamy

$$e^{z+2k\pi} = e^z.$$

6.1 Logarytmy

Definicja. *Logarytmem naturalnym liczby zespolonej $z \neq 0$ nazywamy liczbę zespoloną w o tej własności, że*

$$e^w = z.$$

Piszemy wtedy

$$w = \ln z \quad \textit{lub} \quad w = \log z.$$

Ze względu na okresowość funkcji $w \mapsto e^w$ dla dowolnej liczby z istnieje nieskończenie wiele jej logarytmów naturalnych, różniących się między sobą o wielokrotność liczby $2\pi i$. Mamy bowiem

$$e^w = e^{w+2k\pi i} = z$$

Niech $w = \ln z$ i niech $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, gdzie $r = |z|$, $\theta = \arg z$. Jeśli $w = x + iy$, to z równości

$$e^w = e^x e^{iy} = re^{i\theta}$$

wynika, że

$$r = e^x \Rightarrow x = \ln r = \ln |z|$$

oraz

$$y = \theta + 2k\pi i = \arg z.$$

Mamy więc

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

Ponieważ funkcja wykładnicza $z \mapsto e^z$ jest różnowartościowa w pasie

$$|\mathrm{Im} z| < \pi$$

i odwzorowuje ten pas na

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0],$$

a więc w tym obszarze możemy określić funkcję (jednoznaczną) $\log z$ (lub Log$z$). Ta funkcja jest nazywana logarytmem głównym, lub gałęzią główną logarytmu i jest analityczna w Ω oraz

$$(\log z)' = \frac{1}{z}.$$

Definicja *Jeśli $G \subset \mathbb{C}$ jest obszarem (zbiorem otwartym i spójnym) i $f : G \to \mathbb{C}$ jest ciągłą funkcją w G i taką, że $e^{f(z)} = z$, to f jest gałęzią logarytmiczną .*

Oczywiście $0 \notin G$.

Jeśli $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, to $f(re^{i\theta}) = \log r + i\theta$, $|\theta| < \pi$, jest gałęzią logarytmiczną.

Również $f(z) + 2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$, jest gałęzią logarytmiczną w Ω.

Pochodna dowolnej gałęzi logarytmicznej wynosi $\frac{1}{z}$.

Gałąź logarytmiczna nie może być określona w zbiorze $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Potęgi. Dla $z \neq 0$ oraz $\alpha \in \mathbb{C}$ definiujemy

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}.$$

Zauważmy, że

- funkcja z^α jest funkcją (jednoznaczną) wtedy i tylko wtedy, gdy$\alpha \in \mathbb{Z}$.
- $z^{1/n}$ma zawsze n różnych wartości.

Przykład. Wyznaczyć wszystkie wartości i^i.

7 Całki krzywoliniowe

Jeśli funkcja o wartościach zespolonych $f = u + iv$ jest określona na przedziale $[a, b] \subset \mathbb{R}$, to całkę Riemanna funkcji f po przedziale $[a, b]$ definiujemy wzorem

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt.$$

Zatem f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje rzeczywqiste $u = \mathrm{Re} f$ oraz $v = \mathrm{Im} f$ są całkowalne w sensie Riemanna. Ponieważ $f'(t) = iv'(t) + iv'(t)$, więc jeśli $F'(t) = f(t)$ na $[a, b]$, to

$$\int_a^b f(t)dt = Fa) - F(b).$$

Krzywą γ na płaszczyźnie $\mathbb{C}$ nazywamy funkcję ciągłą $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, gdzie $[a, b] \subset \mathbb{R}$:

$$\gamma = \gamma(t), \quad t \in [a, b]. \tag{4}$$

Jeśli $\gamma(a) = \gamma(b)$, to krzywą nazywamy zamkniętą. Każda krzywa γ ma orientacje (uporządkowanie punktów krzywej) odpowiadającą wzrostowi parametru t.

Jeśli krzywą $-\gamma$ opiszemy równaniem

$$-\gamma = \gamma(a+b-t), \quad t \in [a,b],$$

to orientacja $-\gamma$ jest przeciwna do orientacji γ opisanej (4).

Jeśli γ_1, γ_2 są krzywymi takimi, że koniec γ_1 jest jednocześnie początkiem γ_2, to krzywą możemy utworzyć krzywą będącą ich sumą $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Mówimy, że krzywa γ jest gładka (regularna) jeśli

$$\gamma : z = z(t), \quad t \in [a,b]$$

oraz funkcja $z(t)$ jest klasy C^1 na $[a,b]$.

Jeśli krzywa γ jest taką jak powyżej krzywą gładką na płaszczyźnie $\mathbb{C}$, a f jest funkcją zespoloną określoną na γ, to całkę krzywoliniową funkcji f po krzywej γ definiujemy wzorem

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t)z'(t)dt.$$

Jeśli

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n,$$

gdzie γ_k, $k = 1, \ldots, n$ są krzywymi gładkimi, to mówimy, że γ jest kawałkami gładka. Dla takiej krzywej γ przyjmujemy

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)dz.$$

7.1 Własności całek krzywoliniowych

1)
$$\int_\gamma (f+g)dz = \int_\gamma f dz + \int_\gamma g dz,$$
(przy założeniu, że całki po prawej stronie równości istnieją)

2) dla dowolnej stałej $c \in \mathbb{C}$:
$$\int_\gamma cf dz = c \int_\gamma f dz$$

3)

$$\int_{-\gamma} f dz = -\int_{\gamma} f dz,$$

gdzie $-\gamma$ oznacza krzywą mającą orientację przeciwną do krzywej γ.

4) Jeśli $\gamma : z = z(t),\ t \in [a, b]$, to

$$\left|\int_{\gamma} f(z) dz\right| \leqslant M l(\gamma),$$

gdzie $M = \max\{|f(z)| : z \in \gamma\}$, a $l(\gamma)$ oznacza długość krzywej γ daną wzorem

$$l(\gamma) = \int_a^b |z'(t)| dt.$$

Dowód własności 4). Mamy

$$\left|\int_{\gamma} f(z) dz\right| = \left|\int_a^b f(z(t)) z'(t) dt\right| \leqslant \int_a^b |f(z(t))||z'(t)| dt$$
$$\leqslant M \int_a^b |z'(t)| dt = M l(\gamma)$$

8 Całka krzywoliniowa a funkcja pierwotna

Definicja. *Mówimy, że funkcja f określona w obszarze $D \subset \mathbb{C}$ ma funkcję pierwotną F w tym obszarze, jeśli F jest funkcją analityczną w D oraz dla $z \in D$ mamy $f(z) = F'(z)$.*

Następne twierdzenie mówi, że warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia funkcji pierwotnej funkcji f ciągłej w obszarze jest zerowanie się całek tej funkcji po krzywych zamkniętych zawartych w tym obszarze.

Twierdzenie. *Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by funcja f ciągła w obszarze D miała w tym obszarze funkcję pierwotną jest by dla każdej krzywej (kawałkami regularnej) zamkniętej $\gamma \subset D$*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Załóżmy najpierw, że F jest funkcją pierwotną funkcji f w obszarze D, czyli, że

$$\bigwedge_{z \in D} F'(z) = f(z).$$

Niech $\gamma \subset D$ będzie krzywą zamkniętą opisaną równaniem

$$\gamma: \ z = z(t), \ t \in [a, b],$$

przy czy mamy $z(a) = z(b)$.

Wtedy

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b f(z(t))z'(t)dt \\ &= \int_a^b F'(z(t))z'(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\left(F(z(t))\right)dt \\ &= F(z(b)) - F(z(a)) = 0.\end{aligned}$$

Załóżmy teraz, że

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

dla dowolnej krzywej zamkniętej $\gamma \subset D$. Niech $a, z \in D$ będą dowolnie ustalonymi punktami. Z ciągłości funkcji f w punkcie z wynika, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$ takie, że $K(z, \delta) \subset D$ oraz

$$|f(z+h) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{jeśli} \quad |h| < \delta.$$

Zdefiniujmy funkcję F wzorem

$$F(w) = \int_{\gamma_w} f(\zeta)d\zeta,$$

gdzie γ_w jest dowolnie wybraną krzywą zawartą w D o początku w a i końcu w. Zauważmy, ze przy ustalonym a funkcja $F(w)$ jets dobrze zdefiniowana, tzn. wartość $F9w)$ nie zależy od wyboru krzywej łączącej punkty a i w. Istotnie jeśli γ'_w jest inną taką krzywą, to $\gamma_w - \gamma'_w$ jest krzywą zamkniętą w D, a więc

$$0 = \int_{\gamma_w + \gamma'_w} f(\zeta)d\zeta = \int_{\gamma_w} f(\zeta)d\zeta - \int_{\gamma'_w} f(\zeta)d\zeta,$$

co oznacza, że

$$\int_{\gamma_w} f(\zeta)d\zeta = \int_{\gamma'_w} f(\zeta)d\zeta.$$

Wykażemy teraz, że $F'(z) = f(z)$. Dla dostatecznie małych $|h|$ mamy

$$F(z+h) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta + \int_{[z,z+h]} f(\zeta)d\zeta.$$

Zatem

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} F(\zeta)d\zeta.$$

Stąd, dla $|h| < \delta$ mamy

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_{[z,z+h]}(f(\zeta)-f(z))d\zeta\right| \leqslant \frac{1}{|h|}\varepsilon|h| = \varepsilon.$$

9 Twierdzenie całkowe Cauchy'ego

Twierdzenie całkowe mówi ogólnie, że całka z funkcji holomorficznej w obszarze D po odpowiedniej krzywej zamkniętej wynosi zero. Jedną z najprostszych wersji tego twierdzenia jest następujący

Lemat Goursata. *Jeśli funkcja f jest holomorficzna w obszarze D i niezdegenerowany trójkąt T o wierzchołkach z_1, z_2, z_3 (czyli $T = \{z : z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3,\ \lambda_k \geqslant 0,\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 1\}$) zawiera się w obszarze D, to*

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0$$

Definicja. *Obszar $G \subset \mathbb{C}$ nazywamy gwiaździstym względem punktu a jeśli wraz z każdym punktem $z\in G$ cały odcinek $[a, z$ zawiera się w G.*

Następne twierdzenie nosi nazwę twierdzenia Cauchy'ego dla obszarów gwiaździstych

Twierdzenie. *Jeśli funkcja f jest holomorficzna w obszarze gwiaździstym G to dla dowolnej krzywej zamkniętej γ kawałkami gładkiej leżącej w obszarze G*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Dowód. Załóżmy, ze obszar G jest gwiaździsty względem punktu $a \in G$. Rozważmy funkcję

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta)d\zeta$$

. Wykażemy, że F jest funkcją pierwotną dla funkcji f w obszarze G. Niech $z \in G$ będzie dowolnie wybranym punktem obszaru G. Niech $r.0$ będzie takie, że $K(z,r) \subset G$. wtedy jeśli $|h| < r$, to odcinek $[z, z+h] \subset G$ oraz cały trójkąt T o w wierzchołkach $a, z, z+h$ zawiera się w G. Z lematu Goursata wynika, że

$$0 = \int_{\partial T} f(\zeta)d\zeta = \int_{[a,z]} f(\zeta)d\zeta + \int_{[z,z+h]} f(\zeta)d\zeta + \int_{[z+h,a]} f(\zeta)d\zeta.$$

Zatem

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(\zeta)d\zeta.$$

Z ciągłości funkcji f w punkcie z wynika, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $0 < \delta < r$ takie, że

$$|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{jeśli} \quad |z - \zeta| < \delta.$$

Oznacza to, że jeśli $|h| < \delta$, to

$$f(\zeta) = f(z) + \varepsilon(\zeta), \quad \text{gdzie} \quad |\varepsilon(\zeta)| < \varepsilon$$

dla $\zeta \in [z, z+h]$. Zatem

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} (f(z) + \varepsilon(\zeta))d\zeta = f(z)h + \int_{[z,z+h]} \varepsilon(\zeta)d\zeta.$$

Stąd

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_{[z,z+h]} \varepsilon(\zeta)d\zeta\right| \leqslant \frac{1}{|h|}\varepsilon|h| = \varepsilon.$$

Wykazaliśmy więc, że $F'(z) = f(z)$. Na mocy twierdzenia o funkcji pierwotnej mamy

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Uwaga. Obszar $D \subset \mathbb{C}$ nazywamy jednospójnym jeśli $\bar{\mathbb{C}} \setminus D$ jest zbiorem spójnym.

Można wykazać, że teza ostatniego twierdzenia jest prawdziwa przy założeniu jednospójności obszaru.

$\square$

Uwaga. Obszar $D \subset \mathbb{C}$ nazywamy jednospójnym jeśli $\bar{\mathbb{C}} \setminus D$ jest zbiorem spójnym.
Można wykazać, że teza ostatniego twierdzenia jest prawdziwa przy założeniu jednospójności obszaru.

Literatura

[1] John B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag New York-Heidelberg-Berlin 1973

[2] Rober E. Greene, Steven G. Kranz, *Functions of One Complex Variable*, American Mathematical Society Providence 2002

[3] Jan Krzyż, Julian Ławrynowicz, *Elementy analizy zespolonej*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne Warszawa 1981

[4] Franciszek Leja, *Funkcje zespolone*, PWN Warszawa 1979

[5] Herb Silverman, *Complex Variables* Houghton Mifflin Company Boston 1975