Wykład 3 (13.03.2023)

Rodzaje punktów osobliwych

Przypomnijmy, że jeśli funkcja f jest analityczna w nakłutym otoczeniu punktu $a \in \mathbb{C}$, to a nazywamy (odosobnionym) punktem osobliwym

Definicja. *Mówimy, że funkcja f analityczna w nakłutym otoczeniu punktu a ma biegun rzędu k, jeśli*

$$\lim_{z\to a} f(z)(z-a)^k = A \neq 0, \infty.$$

Twierdzenie 1. *Jeśli a jest izolowanym punktem osobliwym funkcji f takim, że $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$, to istnieje naturalna liczba k taka,że a jest biegunem rzędu k.*

Dowód. Jeśli $f(z) \to \infty$ przy $z \to a$, to $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ jest funkcją ograniczoną w pewnym nakłutym otoczeniu punktu a. Z twierdzenia Riemanna wynika, ze funkcja g ma osobliwość pozorną w punkcie a i może być rozszerzona jako funkcja analityczna na otoczenie tego punktu. Zatem dla $|z-a| < \delta$,

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = a_0 + a_1(z-a) + \dots$$

Wtedy $\lim_{z\to a} g(z) = a_0 = 0$. Zauważmy, że gdyby wszystkie współczynniki a_n były równe zeru, to $f(z) \equiv \infty$ w pewnym otoczeniu a.

Załóżmy, ze a_k jest pierwszym niezerowym współczynnikiem taylorowskim funkcji g. Wtedy

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = a_k(z-a)^k + a_{k+1}(z-a)^{k+1} + \dots$$

Stąd

$$\frac{g(z)}{(z-a)^k} = \frac{1}{f(z)(z-a)^k} = a_k + a_{k+1}(z-a)^{k+1} + \dots, \quad a_k \neq 0.$$

A więc,

$$\lim_{z\to a} \frac{1}{f(z)(z-a)^k} = a_k$$

czyli

$$\lim_{z\to a} f(z)(z-a)^k = \frac{1}{a_k} \neq 0, \infty.$$

Wniosek. *Jeśli funkcja f ma biegun w punkcie a, to w pewnym nakłutym otoczeniu tego punktu*

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad a_{-k} \neq 0,$$

gdzie k jest rzędem bieguna.

Dowód. Jeśli f ma biegun rzędu k, to

$$\lim_{z \to a} f(z)(z-a)^k = A \neq 0, \infty.$$

Zatem $f(z)(z-a)^k$ jest funkcją analityczną w otoczeniu a. Z twierdzenia Taylora wynika, że

$$f(z)(z-a)^k = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

.

Zatem

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n-k}.$$

Rodzaje punktów osobliwych:

(a) punkty pozornie osobliwe

(b) bieguny; izolowany punkt osobliwy a funkcji f nazywamy biegunem jeśli

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty$$

(c) izolowane punkty osobliwe, które nie są ani biegunami ani punktami pozornie osobliwymi nazywamy punktami istotnie osobliwymi.

Uwaga. Jeśli a jest punktem istotnie osobliwym funkcji f, to część główna jej szeregu Laurenta w otoczeniu punktu a zawiera nieskończenie wiele wyrazów.

Przypomnijmy, że jeśli f jest analityczna w nakłutym otoczeniu P punktu a, tzn $P = \{z : 0 < |z-a| < r\}$, to dla $z \in P$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

gdzie

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

przy czym C jest okręgiem $|z-a| = \delta < r$.

Zauważmy jeszcze, że okrąg ten może być zastąpiony przez dowolną krzywą Jordana Γ zawartą w P i taką, że a leży w jej wnętrzu. Istotnie, możemy utworzyć dwie krzywe zamknięte L_1 i L_2 złożone z części krzywej γ, z nacięć łączących krzywą γ z okręgiem C oraz z części okręgu C (zorientowanego ujemnie) w ten sposób, że

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz + \int_{-C} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = \int_{L_1} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz + \int_{L_2} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz,$$

gdyż suma całek po nacięciach w L_1 i L_2 wynosi zero. Ponadto ponieważ każda z funkcji podcałkowych jest analityczna w pewnym obszarze jednospójnym zawierającym L_1 lub L_2, więc każda z całek po prawej stronie ostatniej równości wynosi 0. Zatem

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz + \int_{-C} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = 0,$$

co oznacza, że

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = a_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

W szczególnym przypadku $n = -1$ mamy

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz.$$

Współczynnik a_{-1} szeregu Laurenta nazywamy residuum funkcji f w punkcie a i oznaczamy

$$\mathrm{res}(a; f).$$

Przykład 1. Obliczyć

$$\int_\Gamma e^{1/z}dz,$$

gdzie Γ jest krzywą Jordana, zawierającą 0 w swoim wnętrzu. Mamy

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \dots,$$

a więc $\mathrm{res}(0, e^{1/z}) = 1$ oraz

$$\int_\Gamma e^{1/z} dz = 2\pi i$$

Przykład 2. Dla $z \in \mathbb{C}$ definiujemy

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

Wykazać, że

$$\int_{|z|=1} z^2 \sin\frac{1}{z} dz = -\frac{\pi i}{3}.$$

Dla $z \neq 0$ mamy

$$z^2 \sin\frac{1}{z} = z^2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right) = z - \frac{1}{6z} + \frac{1}{5!z^3} - \dots.$$

Zatem

$$\int_{|z|=1} z^2 \sin\frac{1}{z} dz = 2\pi i \mathrm{res}\left(0, z^2 \sin\frac{1}{z}\right) = -\frac{2\pi i}{6} = -\frac{\pi i}{3}$$