Wykład 2 (6.03.2023)

Uwagi do twierdzenia Laurenta.

1. Z twierdzenia Laurenta wynika, że jeśli f jest analityczna w nakłutym otoczeniu, $P = \{z : 0 < |z-a| < \delta\}$ punktu a, to f jest sumą szeregu Laurenta

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

2. Rozwinięcie w szereg Laurenta, podobnie jak rozwinięcie w szereg Taylora jest jedyne dla danej funkcji (analitycznej w pierścieniu lub kole). Istotnie jeśli dla $z \in P = \{z : r < |z-a| < R\}$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n.$$

to ze wzoru na współczynniki Laurenta

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz, \quad k \in \mathbb{Z},$$

gdzie $C = |z-a| = \rho,\ r < \rho < R$. Ze zbieżności jednostajnej szeregu Laurenta na C, wynika, ze

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_C (z-a)^{n-k-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{2\pi i} \int_C (z-a)^{n-k-1} dz.$$

Ponieważ

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C (z-a)^m dz = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } m = -1 \\ 0 & \text{jeśli m} \neq -1 \end{cases},$$

więc

$$a_k = b_k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Przykład. Rozwinąć w szereg Laurenta funkcję

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2(z-2)}$$

w pierścieniu $0 < |z-1| < 1$.

Mamy

$$\frac{z^2}{(z-1)^2(z-2)} = \frac{-3}{z-1} + \frac{-1}{(z-1)^2} + \frac{4}{z-2}$$

oraz

$$\frac{4}{z-2} = \frac{4}{-1+z-1} = \frac{-4}{1-(z-1)} = -4\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$$

Ostatecznie

$$f(z) = \frac{-1}{(z-1)^2} + \frac{-3}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-4)(z-1)^n$$

Izolowane punkty osobliwe

Definicja. *Jeśli funkcja f jest analityczna w pewnym nakłutym otoczeniu punktu a, $P = \{z : 0 < |z-a| < \delta\}$, $\delta > 0$, to punkt a nazywamy odosobnionym (izolowanym) punktem osobliwym funkcji f.*

Wykażemy najpierw

Twierdzenie Riemanna. *Jeśli a jest izolowanym punktem osobliwym funkcji f , to warunkiem koniecznym i dostatecznym na to,by funkcja ta miała analityczne rozszerzenie na pewne koło $K(a, \delta)$, jest by*

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0.$$

Dowód. Jeśli funkcja f jest analityczna w pewnym kole $K(a, \delta) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \delta\}$, to z twierdzenia Taylora wynika, że f jest sumą szeregu potęgowego w tym kole, czyli

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots,$$

a więc istnieje skończona granica $\lim_{z\to a} f(z) = a_0$, co z kolei implikuje, że $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$.

Załóżmy teraz, że a jest odosobnionym (izolowanym) punktem osobliwym funkcji f i funkcja f jest analityczna w $P = \{z : 0 < |z-a| < \delta\}$, $\delta > 0$, oraz

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0.$$

Wtedy dla dowolnego $\zeta \in P$,

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(z)}{z-\zeta}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(z)}{z-\zeta}dz, \qquad (1)$$

gdzie C_1 jest okręgiem $|z-a| = \delta_1 < \delta$, a C_0: $|z-a| = \delta_0 < \delta_1$ i $\delta_0 < |a-\zeta| < \delta_1$. Przypomnijmy, że wartość prawej strony ostatniej równości nie zależy od wyboru konkretnych wartości δ_1 i δ_0. Pokażemy teraz, że wartość całki po okręgu C_0 dąży do zera przy $\delta_0 \to 0$.

Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolnie ustalone. Z założenia wynika, że istnieje $\delta_0 > 0$ takie, że $|f(z)| < \frac{\varepsilon}{|z-a|}$ jeśli $0 < |z-a| \leqslant \delta_0$. Wtedy dla $z \in C_0$ mamy $|z-\zeta| = |z-a+a-\zeta| > |a-\zeta| - \delta_0$, oraz

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(z)}{z-\zeta}dz\right| \leqslant \delta_0\frac{\frac{\varepsilon}{\delta_0}}{|a-\zeta|-\delta_0} \leqslant \frac{\varepsilon}{|a-\zeta|-\delta_0}$$

Widzimy więc, że przy ustalonym ζ wartość bezwzględna tej całki może być dowolnie mała przy dostatecznie małym δ_0.

Przechodząc więc w (1) do granicy przy $\delta_0 \to 0$ otrzymujemy

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(z)}{z-\zeta}dz.$$

Powtarzając odpowiednią część rozumowania z dowodu twierdzenia Laurenta widzimy, że

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{C_1}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz(\zeta-a)^n,$$

co oznacza, że f w kole $K(a,\delta)$ jest sumą szeregu potęgowego, a więc jest funkcją analityczną w tym kole.

$\square$

Uwaga. W tym wypadku punkt a nazywamy punktem *pozornie osobliwym funkcji f*.

Przykład. Punkt $a = 0$ jest pozornie osobliwym punktem izolowanym dla funkcji $f(z) = \frac{e^z-1}{z}$. Mamy bowiem,

$$\lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0}(e^z-1) = 0$$