Wykład 1(27.02.2023)

Przypomnienie własności funkcji analitycznych w obszarze płaszczyzny zespolonej.

1. **Twierdzenie Cauchy'ego.**

   Jeśli funkcja f jest holomorficzna w obszarze jednospójnym D to dla dowolnej krzywej zamkniętej γ kawałkami gładkiej leżącej w tym obszarze
   $$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

   Definicja. Obszar $D \subset \mathbb{C}$ nazywamy **jednospójnym** jeśli $\bar{\mathbb{C}} \setminus D$ jest zbiorem spójnym.

2. **Wzór całkowy Cauchy'ego**

   Jeśli f jest funkcją holomorficzną w obszarze D zawierającym dodatnio zorientowaną krzywą Jordana oraz jej wnetrze, to dla dowolnego punktu z_0 wewnątrz γ oraz dowolnego $n \in \mathbb{N}$,
   $$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

3. **Twierdzenie Taylora.** *Załóżmy, że f jest funkcja analityczną w obszarze $D \subset \mathbb{C}$ oraz $z_0 \in D$. Jeśli $\delta = \mathrm{dist(z_0, \partial D)}$, to dla $|z - z_0| < \delta$*
   $$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Szeregi Laurenta

Szereg postaci
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - a)^n \tag{1}$$
nazywamy szeregiem Laurenta i traktujemy go jako sumę dwóch szeregów
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - a)^{-n}. \tag{2}$$

Szereg Laurenta jest zbieżny jeśli zbieżne są oba ostatnie szeregi.

Pierwszy z szeregów w (2) nazywany częścią regularną szeregu Laurenta (1), i jest zwykłym szeregiem potęgowym, którego promień zbieżności R wyraża się wzorem

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Drugi z szeregów w (2) nazywamy częścią główną szeregu Laurenta (1) i szereg ten jest zbieżny dla $|z-a| > r$, gdzie $r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}$.

Istotnie jeśli $\zeta = (z-a)^{-1}$, to szereg ten może być zapisany jako szereg potęgowy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n,$$

który jest zbieżny w kole $|\zeta| < r'$, gdzie $r' = (\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|})^{-1}$. Stąd

$$\frac{1}{|z-a|} < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}},$$

czyli $|z-a| > \frac{1}{r'} = r$

Zatem jeśli $r < R$, to szereg Laurenta (1) jest zbieżny w pierścieniu

$$\{z : r < |z-a| < R\}.$$

Jeśli $r = 0$, to pierścień ten redukuje się do nakłutego koła $\{z : 0 < |z-a| < R$.

Ponadto, z wcześniejszych rozważań wynika, że funkcja określona wzorem

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

jest analityczna w pierścieniu $\{z : r < |z-a| < R\}$.

Twierdzenie Laurenta mówi, że każda funkcja analityczna w pierścieniu jest sumą pewnego szeregu Laurenta.

Twierdzenie Laurenta. *Załóżmy, że funkcja f jest analityczna w pierścieniu $P = \{z : r < |z-a| < R\}$ ($0 \leqslant r < R \leqslant \infty$). Wtedy f jest sumą szeregu Laurenta w P,*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad r < |z-a| < R,$$

gdzie

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

oraz $C : |z-a| = \rho, r < \rho < R$.

W dowodzie twierdzenia Laurenta skorzystamy z następującego twierdzenia o przechodzeniu do granicy dla całek krzywoliniowych

Twierdzenie 1. *Jeśli ciąg funkcji zespolonych $\{f_n\}$ ciągłych na krzywej γ jest jednostajnie zbieżny na γ do funkcji f, to*

$$\lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma \lim_{n\to\infty} f_n(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$$

Wniosek. *Jeśli $\{f_n\}$ jest ciągiem funkcji ciągłych na krzywej γ oraz szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ jest zbieżny jednostajnie na γ, to*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_\gamma f_n(z)dz\right) = \int_\gamma\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\right)dz$$

Dowód. Zbieżność jednostajna szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ na γ oznacza, że ciąg $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)$ jest zbieżny jednostajnie na γ. Stosując powyższe twierdzenie do ciągu $S_n(z)$, dostajemy

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_\gamma f_n(z)dz\right) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\int_\gamma f_k(z)dz\right) = \lim_{n\to\infty}\int_\gamma S_n(z)dz \\ &= \int_\gamma \lim_{n\to\infty} S_n(z)dz = \int_\gamma\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\right)dz\end{aligned}$$

□

Dowód twierdzenia Laurenta. Niech $\zeta \in P$ będzie dowolnie ustalone. Wybierzmy r' oraz R' tak by

$$r < r' < |\zeta - a| < R' < R$$

i niech $C : |z-a| = R'$, oraz $C_1 : |z-a| = r'$ Niech ponadto r_0 będzie tak małe, że koło $K = \{z : |z-\zeta| \leqslant r_0\}$ jest zawarte w pierścieniu $P' = \{z : r' < |z-a| < R'\}$.Wtedy funkcja

$$z \mapsto \frac{f(z)}{z-\zeta}$$

jest analityczna w $P \setminus \{z : |z-\zeta| < r_0/2\}$. Poprzez dokonanie odpowiednich nacięć można utworzyć dwie krzywe zamknięte,zawarte w tym obszarze takie, że suma całek krzywoliniowych z powyższej funkcji po tych krzywych daje całkę po $C - C_1 - \partial K$. Zatem

$$\int_C \frac{f(z)}{z-\zeta}dz - \int_{C_1}\frac{f(z)}{z-\zeta}dz - \int_{\partial K}\frac{f(z)}{z-\zeta}dz = 0$$

Stąd i ze wzoru całkowego Cauchy'ego:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{f(z)}{z-\zeta}dz = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_C \frac{f(z)}{z-\zeta}dz - \int_{C_1}\frac{f(z)}{z-\zeta}dz\right). \qquad (3)$$

Zauważmy teraz, że dla$z \in C$ mamy $|z-a| = R' > |a-\zeta|$, czyli $\frac{|a-\zeta|}{|z-a|} < 1$. Zatem

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{z-a-(\zeta-a)} &= \frac{1}{(z-a)\left(1-\frac{\zeta-a}{z-a}\right)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}}\end{aligned}$$

Ponieważ szereg $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$ jest jednostajnie zbieżny na C, z Wniosku wynika, że

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-\zeta}dz =& \frac{1}{2\pi i}\int_C \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-a)^n f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = \sum_{n=0}^{\infty}\int_C \frac{(\zeta-a)^n f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \\ =& \sum_{n=0}^{\infty}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\zeta-a)^n\end{aligned}$$

Podobnie, jeśli $z \in C_1$, to $|z-a| = r' < |a-\zeta|$, to

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-a-(z-a)} &= \frac{1}{(\zeta-a)\left(1-\frac{z-a}{\zeta-a}\right)} \\ = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-a)^{n-1}}{(\zeta-a)^n} \\ = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta-a)^{-n}}{(z-a)^{-n+1}} &= \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}}\end{aligned}$$

Stąd i ze zbieżności jednostajnej ostatniego szeregu dostajemy

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{C_1}\frac{f(z)}{z-\zeta}dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{-1}(\zeta-a)^n\int_{C_1}\frac{f(z)}{(z-\zeta)^{n+1}}dz$$

Zatem ze wzoru (3) wynika, że

$$f(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\zeta-a)^n,$$

gdzie

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad \text{dla } n = 0, 1, \dots$$

oraz

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad \text{dla } n = -1, -2, \dots.$$

Teraz wystarczy zauważyć, że w powyższych całkach C oraz C_1 mogą być zastąpione przez dowolny okrąg $|z-a| = \rho$, $r < \rho < R$.

Uwagi.

Z twierdzenia Laurenta wynika, że jeśli f jest analityczna w nakłutym otoczeniu, $P = \{z : 0 < |z-a| < \delta\}$ punktu a, to f jest sumą szeregu Laurenta

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

Ponieważ rozwinięcie w szereg potęgowy funkcji analitycznej w kole jest jednoznaczne, z definicji szeregu Laurenta wynika, że rozwinięcie funkcji analitycznej w pierścieniu (lub w nakłutym otoczeniu punktu) w szereg Laurenta jest też jednoznaczne.