dr Dominika Klimek-Smęt Październik/Listopad 2020

ZESTAW ZADAŃ nr 1
MATEMATYKA DLA EKONOMISTÓW
Zarządzanie - I ROK

Elementy logiki matematycznej. Zbiory. Funkcje elementarne i ich własności.

Zadanie 1.
Wykazać, że następujące wyrażenia są tautologiami:
(a) $[\sim (p \wedge q)] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (\sim q)]$; (b) $\sim (\sim p) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$; (c) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \vee q)$;
(d) $p \Rightarrow (\sim p \wedge q)$; (e) $[q \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$; (f) $(q \vee r) \Leftrightarrow [(\sim p \wedge p) \Rightarrow r]$.

Zadanie 2.
Wyznaczyć elementy następujących zbiorów $A \cup B$, $B \setminus C$, $D \setminus B$, $A \cap F$, $A \times C$, $C \times A$:
(a) $A = \{x \in N : |x+1| < 4\}$; (b) $B = \{x \in R : x^2 + 5x + 6 \le 0\}$; (c) $C = \{x \in R : x^2 = 3\}$;
(d) $D = \{x \in R : \sqrt{x^2 + 6x + 9} \ge 0\}$; (e) $E = \{x \in N : \sqrt{x} < 0\}$; (f) $F = \{x \in R : x^2 < 5\}$.

Zadanie 3. Czy podane zbiory są podzbiorami zbioru N ?
$A = \{x \in R : x = (-3)^{3n} \wedge n \in N\}$; $B = \{x \in R : x = (-2)^n \wedge n \in N\}$;
$C = \left\{ x \in R : x = \left(\frac{-5}{\sqrt{5}}\right)^{2n} \wedge n \in N \right\}$; $D = \{x \in R : \sqrt{9x^2} \ge 0\}$?

Zadanie 4. Oceń wartość logiczną zdań:
(a) $\underset{x\in N}{\exists}\{\sqrt{x} = -2\}$; (b) $\underset{x\in R}{\forall}\{x < \sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}\}$; (c) $\underset{x\in R}{\forall}\{x^2 + 4 > 4\}$; (d) $\underset{x\in R}{\exists}\{x^2 = 5 \wedge x < 0\}$;
(e) $\underset{x\in R}{\forall}\{x^2 > 1 \Rightarrow x > 1\}$; (f) $\underset{x\in R}{\forall}\{x > 3 \vee x \le 3\}$; (g) $\underset{x\in R}{\forall}\left\{\cos x = \frac{1}{2}\right\}$.

Zadanie 5.
Znaleźć naturalną dziedzinę D i zbiór wartości funkcji ZW każdej z podanych niżej funkcji:
(a) $\mathrm{f(x)} = -3x + 2$; (b) $\mathrm{f(x)} = \frac{1}{3}x - 4$; (c) $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + 1$; (d) $f(x) = x^2 - 3x + 1$;
(e) $f(x) = \frac{5}{x+2}$; (f) $f(x) = \frac{x-1}{x+4}$; (g) $f(x) = 3^x$; (h) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; (h) $\mathrm{y} = \log_3 \mathrm{x}$;
(i) $\mathrm{y} = \ln(\mathrm{x}+4)$; (j) $\mathrm{y} = \sqrt{x-2}$; (k) $\mathrm{y} = \sqrt{x^2 - x - 6}$; (l) $\mathrm{y} = \sqrt[3]{2x+7}$; (m*) $\mathrm{y} = \sqrt{\cos x}$;
(n) $\mathrm{y} = \sqrt[3]{\sin(x+4)}$; (o) $\mathrm{y} = 3x^6 + x - 5$; (p) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$; (r) $\mathrm{y} = |x-3|$;
(s) $\mathrm{y} = \sqrt{\frac{1}{2x}}$; (t) $\mathrm{y} = \frac{x}{x^2 - 9}$; (u) $\mathrm{y} = 3tgx - 2$; (w) $\mathrm{y} = \sqrt{x+2} + \sqrt{x}$; (z) $\mathrm{y} = \sqrt{9x^2}$.

Zadanie 6. Omówić własności podanych funkcji (wzajemne położenie, miejsca zerowe, równoległość, prostopadłość, monotoniczność, inne zależności), które można odczytać z wykresu. Wykonać wykresy:
(a) $y = x + 4$; (b) $y = -3x + 1$; (c) $y = \frac{1}{2}|x|$; (d) $y = |x| - 4$; (e) $y = x^2$;
(f) $y = x^2 + \frac{1}{6}$; (g) $y = 12 - 6x^2$; (h) $y = x^3$; (i) $y = x^3 + 1$; (j) $y = 9 - \frac{1}{3}x^3$;
(k) $y = \frac{x}{x-1}$; (l) $y = 3 + \frac{1}{x}$; (m) $y = -2 + \frac{3}{x}$; (n) $y = 5 - \frac{1}{x}$; (o) $y = -3^x$;
(p) $y = 2^{|x|}$; (q) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$; (r) $y = 5^{x+1} + 5$; (s) $y = 3 + \sqrt{x}$; (t) $y = \sqrt{x}$;

(u) $y=\sqrt{6x-3}$; (w) $y=\sin x-\frac{1}{2}$, (x) $y=2+\cos x$; (z) $y=x^4$; (v) $y=x^4-16$;

(A) $y=\log_3 x$; (B) $y=\log_2 x+1$; (C) $y=\log_3(x-5)$; (D) $y=\log_4(x+2)-1$;

(E) $y=\log_2(x+1)$; (F) $y=\log_{1/4}(x+2)$; (G) $y=\ln(x-3)$; (H) $y=\ln(-x)$.

Zadanie 7. Znaleźć miejsca zerowe oraz zbiór, w którym podane funkcje przyjmują wartości dodatnie oraz wartości ujemne:

(a) $f(x)=x+4$; (b) $f(x)=5x-x^2$; (c) $f(x)=\sin\frac{\pi}{2x}$; (d) $f(x)=e-e^x$.

(d) $f(x)=x^3-3x^2-x+3$; (e) $f(x)=\sqrt{5x-4}$; (f) $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x-1}$.

Zadanie 8.
Wykaż, że funkcja $f(x)=x^2-2$ jest rosnąca w przedziale $x\in(0,+\infty)$ i malejąca dla $x\in(-\infty,0)$.

Zadanie 9.
Pokazać, że funkcja $f(x)=\frac{x+3}{x}$ jest malejąca dla $x\in(0,+\infty)$. Zbadaj monotoniczność tej funkcji dla $x\in(-\infty,0)$.

Zadanie 10.
Pokazać, że funkcja $f(x)=x^2+x-2$ jest malejąca w przedziale $x\in(-\infty,-\frac{1}{2})$.

Zadanie 11. Zbadać ograniczoność następujących funkcji:
(a) $f(x)=x+4$; (b) $f(x)=x^2+1$; (c) $f(x)=\sqrt{x}$; (d) $f(x)=\log_5 x$;
(e) $f(x)=3^x$; (f) $f(x)=x^3-1$; (g) $f(x)=x^4+1$; (h) $f(x)=x^2-2x+3$.

Zadanie 12.
Zbadać różnowartościowość następujących funkcji:
(a) $f(x)=3x-4$; (b) $f(x)=x^2$; (c) $f(x)=\sqrt{4x}$;
(d) $f(x)=\log_3 x$; (e) $f(x)=x^3$; (f) $f(x)=x^4$.

Zadanie 13. Które z poniższych funkcji są parzyste, które nieparzyste?
(a) $f(x)=-2x$; (b) $f(x)=x^4-5x^2$; (c) $f(x)=2\sin x-3\cos x$; (d) $f(x)=4^x-4^{-x}$;
(e) $f(x)=\frac{e^x+2}{e^x-2}$; (f) $f(x)=\frac{4}{x-4}$; (g) $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$; (h) $f(x)=\frac{|x|}{7x}$.

Zadanie 14. Określić, które z poniższych funkcji są okresowe i wyznaczyć ich okres:

(a) $f(x)=2\sin 3x$; (b) $f(x)=\cos 4x$; (c) $f(x)=4+\sin x$; (d) $f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x$;

(e) $f(x)=\sin^2 x$; (f) $f(x)=\sin(3\pi x+6)$; (g) $f(x)=tg\,4x$; (h) $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-tg^2 x$;

(i) $f(x)=\cos\frac{1}{6}x$; (j) $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; (k) $f(x)=ctg\frac{5\pi x}{6}$.

Zadanie 15. Określić, które z poniższych funkcji mają funkcje odwrotne, znaleźć te funkcje odwrotne i wyznaczyć ich naturalne dziedziny:
(a) $f(x)=-4x+5$; (b) $f(x)=(x+2)^3$; (c) $f(x)=\sin 2x$; (d) $f(x)=\ln 2x$;

(e) $f(x)=5^{\frac{x}{3}}$; (f) $f(x)=\frac{2-x}{2+x}$; (g) $f(x)=3+x^2$.

Zadanie 16. Znaleźć złożenia $f\circ g$ oraz $g\circ f$ następujących funkcji:
(a) $f(x)=3x-2$, $g(x)=x^2$; (b) $f(x)=2x+1$, $g(x)=-3x$;
(c) $f(x)=\sin x$, $g(x)=\sqrt{x}$; (d) $f(x)=2^x$, $g(x)=\log_4 x$.