

**ZESTAW ZADAŃ nr 1**  
**MATEMATYKA DLA EKONOMISTÓW**  
**Finanse i rachunkowość - I ROK**

Elementy logiki matematycznej. Zbiory. Funkcje elementarne i ich własności.

**Zadanie 1.**

Wykazać, że następujące wyrażenia są tautologiami:

- (a)  $[\sim(p \wedge q)] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (\sim q)]$ ; (b)  $\sim(\sim p) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ ; (c)  $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \vee q)$ ;  
 (d)  $p \Rightarrow (\sim p \wedge q)$ ; (e)  $[q \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ ; (f)  $(q \vee r) \Leftrightarrow [(\sim p \wedge p) \Rightarrow r]$ .

**Zadanie 2.**

Wyznaczyć elementy następujących zbiorów  $A \cup B$ ,  $B \setminus C$ ,  $D \setminus B$ ,  $A \cap F$ ,  $A \times C$ ,  $C \times A$ :

- (a)  $A = \{x \in \mathbb{N} : |x+1| < 4\}$ ; (b)  $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 5x + 6 \leq 0\}$ ; (c)  $C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 3\}$ ;  
 (d)  $D = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 + 6x + 9} \geq 0\}$ ; (e)  $E = \{x \in \mathbb{N} : \sqrt{x} < 0\}$ ; (f)  $F = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 5\}$ .

**Zadanie 3.** Czy podane zbiory są podzbiorymi zbioru  $\mathbb{N}$ ?

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x = (-3)^{3n} \wedge n \in \mathbb{N}\}; \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x = (-2)^n \wedge n \in \mathbb{N}\};$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \left( \frac{-5}{\sqrt{5}} \right)^{2n} \wedge n \in \mathbb{N} \right\}; \quad D = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{9x^2} \geq 0\}?$$

**Zadanie 4.** Oceń wartość logiczną zdań:

- (a)  $\exists_{x \in \mathbb{N}} \{\sqrt{x} = -2\}$ ; (b)  $\forall_{x \in \mathbb{R}} \{x < \sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}\}$ ; (c)  $\forall_{x \in \mathbb{R}} \{x^2 + 4 > 4\}$ ; (d)  $\exists_{x \in \mathbb{R}} \{x^2 = 5 \wedge x < 0\}$ ;  
 (e)  $\forall_{x \in \mathbb{R}} \{x^2 > 1 \Rightarrow x > 1\}$ ; (f)  $\forall_{x \in \mathbb{R}} \{x > 3 \vee x \leq 3\}$ ; (g)  $\forall_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \cos x = \frac{1}{2} \right\}$ .

**Zadanie 5.**

Znaleźć naturalną dziedzinę  $D$  i zbiór wartości funkcji  $ZW$  każdej z podanych niżej funkcji:

(a)  $f(x) = -3x + 2$ ; (b)  $f(x) = \frac{1}{3}x - 4$ ; (c)  $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + 1$ ; (d)  $f(x) = x^2 - 3x + 1$ ;

(e)  $f(x) = \frac{5}{x+2}$ ; (f)  $f(x) = \frac{x-1}{x+4}$ ; (g)  $f(x) = 3^x$ ; (h)  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ; (i)  $y = \log_3 x$ ;

(j)  $y = \ln(x+4)$ ; (k)  $y = \sqrt{x-2}$ ; (l)  $y = \sqrt{x^2 - x - 6}$ ; (m)  $y = \sqrt[3]{2x+7}$ ; (n\*)  $y = \sqrt{\cos x}$ ;

(o)  $y = \sqrt[3]{\sin(x+4)}$ ; (p)  $y = 3x^6 + x - 5$ ; (q)  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ ; (r)  $y = |x-3|$ ;

(s)  $y = \sqrt{\frac{1}{2x}}$ ; (t)  $y = \frac{x}{x^2-9}$ ; (u)  $y = 3\operatorname{tg}x - 2$ ; (v)  $y = \sqrt{x+2} + \sqrt{x}$ ; (z)  $y = \sqrt{9x^2}$ .

**Zadanie 6.** Omówić własności podanych funkcji (wzajemne położenie, miejsca zerowe, równoległość, prostokątowość, monotoniczność, inne zależności), które można odczytać z wykresu. Wykonać wykresy:

(a)  $y = x + 4$ ; (b)  $y = -3x + 1$ ; (c)  $y = \frac{1}{2}|x|$ ; (d)  $y = |x| - 4$ ; (e)  $y = x^2$ ;

(f)  $y = x^2 + \frac{1}{6}$ ; (g)  $y = 12 - 6x^2$ ; (h)  $y = x^3$ ; (i)  $y = x^3 + 1$ ; (j)  $y = 9 - \frac{1}{3}x^3$ ;

(k)  $y = \frac{x}{x-1}$ ; (l)  $y = 3 + \frac{1}{x}$ ; (m)  $y = -2 + \frac{3}{x}$ ; (n)  $y = 5 - \frac{1}{x}$ ; (o)  $y = -3^x$ ;

(p)  $y = 2^{|x|}$ ; (q)  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ ; (r)  $y = 5^{x+1} + 5$ ; (s)  $y = 3 + \sqrt{x}$ ; (t)  $y = \sqrt{x}$ ;

(u)  $y = \sqrt{6x-3}$ ; (w)  $y = \sin x - \frac{1}{2}$ ; (x)  $y = 2 + \cos x$ ; (z)  $y = x^4$ ; (v)  $y = x^4 - 16$ ;

(A)  $y = \log_3 x$ ; (B)  $y = \log_2 x + 1$ ; (C)  $y = \log_3(x-5)$ ; (D)  $y = \log_4(x+2) - 1$ ;

(E)  $y = \log_2(x+1)$ ; (F)  $y = \log_{\frac{1}{4}}(x+2)$ ; (G)  $y = \ln(x-3)$ ; (H)  $y = \ln(-x)$ .

**Zadanie 7.** Znaleźć miejsca zerowe oraz zbiór, w którym podane funkcje przyjmują wartości dodatnie oraz wartości ujemne:

(a)  $f(x) = x + 4$ ; (b)  $f(x) = 5x - x^2$ ; (c)  $f(x) = \sin \frac{\pi}{2x}$ ; (d)  $f(x) = e - e^x$ .

(d)  $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ ; (e)  $f(x) = \sqrt{5x-4}$ ; (f)  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1}$ .

**Zadanie 8.**

Wykaż, że funkcja  $f(x) = x^2 - 2$  jest rosnąca w przedziale  $x \in (0, +\infty)$  i malejąca dla  $x \in (-\infty, 0)$ .

**Zadanie 9.**

Pokazać, że funkcja  $f(x) = \frac{x+3}{x}$  jest malejąca dla  $x \in (0, +\infty)$ . Zbadaj monotoniczność tej funkcji dla  $x \in (-\infty, 0)$ .

**Zadanie 10.**

Pokazać, że funkcja  $f(x) = x^2 + x - 2$  jest malejąca w przedziale  $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$ .

**Zadanie 11.** Zbadać ograniczoność następujących funkcji:

(a)  $f(x) = x + 4$ ; (b)  $f(x) = x^2 + 1$ ; (c)  $f(x) = \sqrt{x}$ ; (d)  $f(x) = \log_5 x$ ;  
(e)  $f(x) = 3^x$ ; (f)  $f(x) = x^3 - 1$ ; (g)  $f(x) = x^4 + 1$ ; (h)  $f(x) = x^2 - 2x + 3$ .

**Zadanie 12.**

Zbadać różnowartościowość następujących funkcji:

(a)  $f(x) = 3x - 4$ ; (b)  $f(x) = x^2$ ; (c)  $f(x) = \sqrt{4x}$ ;  
(d)  $f(x) = \log_3 x$ ; (e)  $f(x) = x^3$ ; (f)  $f(x) = x^4$ .

**Zadanie 13.** Które z poniższych funkcji są parzyste, które nieparzyste?

(a)  $f(x) = -2x$ ; (b)  $f(x) = x^4 - 5x^2$ ; (c)  $f(x) = 2 \sin x - 3 \cos x$ ; (d)  $f(x) = 4^x - 4^{-x}$ ;  
(e)  $f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 2}$ ; (f)  $f(x) = \frac{4}{x-4}$ ; (g)  $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ ; (h)  $f(x) = \frac{|x|}{7x}$ .

**Zadanie 14.** Określić, które z poniższych funkcji są okresowe i wyznaczyć ich okres:

(a)  $f(x) = 2 \sin 3x$ ; (b)  $f(x) = \cos 4x$ ; (c)  $f(x) = 4 + \sin x$ ; (d)  $f(x) = \cos \frac{\pi}{2} x$ ;  
(e)  $f(x) = \sin^2 x$ ; (f)  $f(x) = \sin(3\pi x + 6)$ ; (g)  $f(x) = \operatorname{tg} 4x$ ; (h)  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x$ ;  
(i)  $f(x) = \cos \frac{1}{6} x$ ; (j)  $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ; (k)  $f(x) = \operatorname{ctg} \frac{5\pi x}{6}$ .

**Zadanie 15.** Określić, które z poniższych funkcji mają funkcje odwrotne, znaleźć te funkcje odwrotne i wyznaczyć ich naturalne dziedziny:

(a)  $f(x) = -4x + 5$ ; (b)  $f(x) = (x+2)^3$ ; (c)  $f(x) = \sin 2x$ ; (d)  $f(x) = \ln 2x$ ;  
(e)  $f(x) = 5^{\frac{x}{3}}$ ; (f)  $f(x) = \frac{2-x}{2+x}$ ; (g)  $f(x) = 3 + x^2$ .

**Zadanie 16.** Znaleźć złożenia  $f \circ g$  oraz  $g \circ f$  następujących funkcji:

(a)  $f(x) = 3x - 2$ ,  $g(x) = x^2$ ; (b)  $f(x) = 2x + 1$ ,  $g(x) = -3x$ ;  
(c)  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$ ; (d)  $f(x) = 2^x$ ,  $g(x) = \log_4 x$ .