

ZESTAW ZADAŃ nr 1
PODSTAWY MATEMATYKI EKONOMICZNEJ
Logistyka - I ROK

Elementy logiki matematycznej. Zbiory. Funkcje elementarne i ich własności.

Zadanie 1.

Wykazać, że następujące wyrażenia są tautologiami:

- (a) $[\sim(p \wedge q)] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (\sim q)]$; (b) $\sim(\sim p) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$; (c) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \vee q)$;
 (d) $p \Rightarrow (\sim p \wedge q)$; (e) $[q \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$; (f) $(q \vee r) \Leftrightarrow [(\sim p \wedge p) \Rightarrow r]$.

Zadanie 2.

Wyznaczyć elementy następujących zbiorów $A \cup B$, $B \setminus C$, $D \setminus B$, $A \cap F$, $A \times C$, $C \times A$:

- (a) $A = \{x \in \mathbb{N} : |x+1| < 4\}$; (b) $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 5x + 6 \leq 0\}$; (c) $C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 3\}$;
 (d) $D = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 + 6x + 9} \geq 0\}$; (e) $E = \{x \in \mathbb{N} : \sqrt{x} < 0\}$; (f) $F = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 5\}$.

Zadanie 3. Czy podane zbiory są podzbiorymi zbioru N ?

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x = (-3)^{3n} \wedge n \in \mathbb{N}\}; \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x = (-2)^n \wedge n \in \mathbb{N}\};$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \left(\frac{-5}{\sqrt{5}} \right)^{2n} \wedge n \in \mathbb{N} \right\}; \quad D = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{9x^2} \geq 0\}?$$

Zadanie 4. Oceń wartość logiczną zdań:

- (a) $\exists_{x \in \mathbb{N}} \{\sqrt{x} = -2\}$; (b) $\forall_{x \in \mathbb{R}} \{x < \sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}\}$; (c) $\forall_{x \in \mathbb{R}} \{x^2 + 4 > 4\}$; (d) $\exists_{x \in \mathbb{R}} \{x^2 = 5 \wedge x < 0\}$;
 (e) $\forall_{x \in \mathbb{R}} \{x^2 > 1 \Rightarrow x > 1\}$; (f) $\forall_{x \in \mathbb{R}} \{x > 3 \vee x \leq 3\}$; (g) $\forall_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \cos x = \frac{1}{2} \right\}$.

Zadanie 5.

Znaleźć naturalną dziedzinę D i zbiór wartości funkcji ZW każdej z podanych niżej funkcji:

(a) $f(x) = -3x + 2$; (b) $f(x) = \frac{1}{3}x - 4$; (c) $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + 1$; (d) $f(x) = x^2 - 3x + 1$;

(e) $f(x) = \frac{5}{x+2}$; (f) $f(x) = \frac{x-1}{x+4}$; (g) $f(x) = 3^x$; (h) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; (i) $y = \log_3 x$;

(j) $y = \ln(x+4)$; (k) $y = \sqrt{x-2}$; (l) $y = \sqrt{x^2 - x - 6}$; (m) $y = \sqrt[3]{2x+7}$; (n*) $y = \sqrt{\cos x}$;

(o) $y = \sqrt[3]{\sin(x+4)}$; (p) $y = 3x^6 + x - 5$; (q) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$; (r) $y = |x-3|$;

(s) $y = \sqrt{\frac{1}{2x}}$; (t) $y = \frac{x}{x^2-9}$; (u) $y = 3\operatorname{tg}x - 2$; (v) $y = \sqrt{x+2} + \sqrt{x}$; (z) $y = \sqrt{9x^2}$.

Zadanie 6. Omówić własności podanych funkcji (wzajemne położenie, miejsca zerowe, równoległość, prostopadłość, monotoniczność, inne zależności), które można odczytać z wykresu. Wykonać wykresy:

(a) $y = x + 4$; (b) $y = -3x + 1$; (c) $y = \frac{1}{2}|x|$; (d) $y = |x| - 4$; (e) $y = x^2$;

(f) $y = x^2 + \frac{1}{6}$; (g) $y = 12 - 6x^2$; (h) $y = x^3$; (i) $y = x^3 + 1$; (j) $y = 9 - \frac{1}{3}x^3$;

(k) $y = \frac{x}{x-1}$; (l) $y = 3 + \frac{1}{x}$; (m) $y = -2 + \frac{3}{x}$; (n) $y = 5 - \frac{1}{x}$; (o) $y = -3^x$;

(p) $y = 2^{|x|}$; (q) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$; (r) $y = 5^{x+1} + 5$; (s) $y = 3 + \sqrt{x}$; (t) $y = \sqrt{x}$;

(u) $y = \sqrt{6x-3}$; (w) $y = \sin x - \frac{1}{2}$; (x) $y = 2 + \cos x$; (z) $y = x^4$; (v) $y = x^4 - 16$;

(A) $y = \log_3 x$; (B) $y = \log_2 x + 1$; (C) $y = \log_3(x-5)$; (D) $y = \log_4(x+2) - 1$;

(E) $y = \log_2(x+1)$; (F) $y = \log_{\frac{1}{4}}(x+2)$; (G) $y = \ln(x-3)$; (H) $y = \ln(-x)$.

Zadanie 7. Znaleźć miejsca zerowe oraz zbiór, w którym podane funkcje przyjmują wartości dodatnie oraz wartości ujemne:

(a) $f(x) = x + 4$; (b) $f(x) = 5x - x^2$; (c) $f(x) = \sin \frac{\pi}{2x}$; (d) $f(x) = e - e^x$.

(d) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$; (e) $f(x) = \sqrt{5x-4}$; (f) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1}$.

Zadanie 8.

Wykaż, że funkcja $f(x) = x^2 - 2$ jest rosnąca w przedziale $x \in (0, +\infty)$ i malejąca dla $x \in (-\infty, 0)$.

Zadanie 9.

Pokazać, że funkcja $f(x) = \frac{x+3}{x}$ jest malejąca dla $x \in (0, +\infty)$. Zbadaj monotoniczność tej funkcji dla $x \in (-\infty, 0)$.

Zadanie 10.

Pokazać, że funkcja $f(x) = x^2 + x - 2$ jest malejąca w przedziale $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$.

Zadanie 11. Zbadać ograniczoność następujących funkcji:

(a) $f(x) = x + 4$; (b) $f(x) = x^2 + 1$; (c) $f(x) = \sqrt{x}$; (d) $f(x) = \log_5 x$;
(e) $f(x) = 3^x$; (f) $f(x) = x^3 - 1$; (g) $f(x) = x^4 + 1$; (h) $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

Zadanie 12.

Zbadać różnowartościowość następujących funkcji:

(a) $f(x) = 3x - 4$; (b) $f(x) = x^2$; (c) $f(x) = \sqrt{4x}$;
(d) $f(x) = \log_3 x$; (e) $f(x) = x^3$; (f) $f(x) = x^4$.

Zadanie 13. Które z poniższych funkcji są parzyste, które nieparzyste?

(a) $f(x) = -2x$; (b) $f(x) = x^4 - 5x^2$; (c) $f(x) = 2 \sin x - 3 \cos x$; (d) $f(x) = 4^x - 4^{-x}$;
(e) $f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 2}$; (f) $f(x) = \frac{4}{x-4}$; (g) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$; (h) $f(x) = \frac{|x|}{7x}$.

Zadanie 14. Określić, które z poniższych funkcji są okresowe i wyznaczyć ich okres:

(a) $f(x) = 2 \sin 3x$; (b) $f(x) = \cos 4x$; (c) $f(x) = 4 + \sin x$; (d) $f(x) = \cos \frac{\pi}{2} x$;
(e) $f(x) = \sin^2 x$; (f) $f(x) = \sin(3\pi x + 6)$; (g) $f(x) = \operatorname{tg} 4x$; (h) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x$;
(i) $f(x) = \cos \frac{1}{6} x$; (j) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; (k) $f(x) = \operatorname{ctg} \frac{5\pi x}{6}$.

Zadanie 15. Określić, które z poniższych funkcji mają funkcje odwrotne, znaleźć te funkcje odwrotne i wyznaczyć ich naturalne dziedziny:

(a) $f(x) = -4x + 5$; (b) $f(x) = (x+2)^3$; (c) $f(x) = \sin 2x$; (d) $f(x) = \ln 2x$;
(e) $f(x) = 5^{\frac{x}{3}}$; (f) $f(x) = \frac{2-x}{2+x}$; (g) $f(x) = 3 + x^2$.

Zadanie 16. Znaleźć złożenia $f \circ g$ oraz $g \circ f$ następujących funkcji:

(a) $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = x^2$; (b) $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = -3x$;
(c) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sqrt{x}$; (d) $f(x) = 2^x$, $g(x) = \log_4 x$.