Przykładowe rozwiązanie zad. 1.7.
Chcemy wyznaczyć minimalną statystykę dostatczną dla parametu θ rodziny rozkładów z gęstościami

$$f(x;\theta) = \frac{2x}{\theta}\exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) I_{[0,\infty)}(x)$$

Skorzystamy z kryterium faktoryzacji (Twierdzenie 7.3). W tym celu doprowadzimy funkcję wiarogodności do postaci iloczynowej (zakładamy, że wszystkie $x_i > 0$ i nie piszemy już indykatora):

$$L(x_1,\ldots,x_n;\theta) = \frac{2x_1}{\theta}\exp\left(-\frac{x_1^2}{\theta}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{2x_n}{\theta}\exp\left(-\frac{x_n^2}{\theta}\right) = \left[2^n x_1\cdot\ldots\cdot x_n\right]\cdot\left[\frac{1}{\theta^n}\exp\left(-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\right]$$

W lewym nawiasie mamy funkcję niezależną od parametru, a w prawym taką, która zależy od próby jedynie poprzez $T(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Zatem $T(X_1,\ldots,X_n) = \sum_{i=1}^n X_i^2$ jest statystyką dostateczną.
W celu sprawdzenia, czy wyżej wyznaczone T jest minimalną statystyką dostateczną, korzystamy z Twierdzenia 7.5.

$$\frac{L(x_1,\ldots,x_n;\theta)}{L(x_1',\ldots,x_n';\theta)} = \frac{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}{x_1'\cdot\ldots\cdot x_n'}\exp\left(-\frac{1}{\theta}\left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n (x_i')^2\right]\right)$$

Widzimy, że powyższe wyrażenie zalży od θ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n (x_i')^2 = 0$, czyli $T(x_1,\ldots,x_n) = T(x_1',\ldots,x_n')$. Zatem T jest minimalną statystyką dostateczną.

Przykładowe rozwiązanie zad. 1.10.
Tym razem mamy do czynienia z rodziną rozkładów o parametrze wektorowym $\theta = (\alpha,\beta) \in (1,\infty)\times(0,\infty)$, z gęstościami

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha} I_{[0,\beta]}(x).$$

Zauważmy, że tym razem indykator jest zależny od parametru β, więc nie możemy o nim zapominać (ale zakładamy, że wszystkie $x_i > 0$). Funkcja wiarogodności ma postać

$$L(x_1,\ldots,x_n;\alpha,\beta) = \frac{\alpha x_1^{\alpha-1}}{\beta^\alpha} I_{[0,\beta]}(x_1)\cdot\ldots\cdot\frac{\alpha x_n^{\alpha-1}}{\beta^\alpha} I_{[0,\beta]}(x_n) = \frac{\alpha^n}{\beta^{n\alpha}}(x_1\ldots x_n)^{\alpha-1} I_{[0,\beta]}\left(\max_{i=1,\ldots,n} x_i\right)$$

Tym razem funkcja zależna tylko od próby jest po prostu funkcją stałą, równą 1. Wybieramy za statystykę dostateczną parę (jest to dość naturalne, gdy rozkład ma dwa parametry):

$$T(X_1,\ldots,X_n) = (X_1\ldots X_n, \max_{i=1,\ldots,n} X_i).$$

Aby sprawdzić, czy wyznaczona statystyka jest minimalną statystyką dostateczną, ponownie korzystamy z Twierdzenia 7.5.

$$\frac{L(x_1,\ldots,x_n;\alpha,\beta)}{L(x_1',\ldots,x_n';\alpha,\beta)} = \left(\frac{x_1\ldots x_n}{x_1'\ldots x_n'}\right)^{\alpha-1}\cdot\frac{I_{[0,\beta]}\left(\max_{i=1,\ldots,n} x_i\right)}{I_{[0,\beta]}\left(\max_{i=1,\ldots,n} x_i'\right)}$$

Podobnie jak poprzednio, widzimy, że to wyrażenie nie zależy od parametrów wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1\ldots x_n = x_1'\ldots x_n'$ oraz $\max_{i=1,\ldots,n} x_i = \max_{i=1,\ldots,n} x_i'$, więc T jest minimalną statystyką dostateczną.

Uwaga 1.
Założenie $x_i > 0$, które się pojawiło w obu przykładach wynikało stąd, że niezależnie od wartości parametrów funkcja gęstości dla $x \le 0$ zerowała się.

Uwaga 2.
W drugim omawianym przykładzie, gdzie przy sprawdzaniu minimalności statystyki dostatecznej pojawił się iloraz indykatorów, można treść twierdzenia dla tego fragmentu rozumieć tak, że jeśli $\max_{i=1,\ldots,n} x_i = \max_{i=1,\ldots,n} x_i'$, to dla każdej wartości β oba indykatory dają ten sam wynik, natomiast jeśli $\max_{i=1,\ldots,n} x_i \neq \max_{i=1,\ldots,n} x_i'$, to istnieje β taka, że dają inny, np. $\beta = \frac{\max_{i=1,\ldots,n} x_i + \max_{i=1,\ldots,n} x_i'}{2}$.