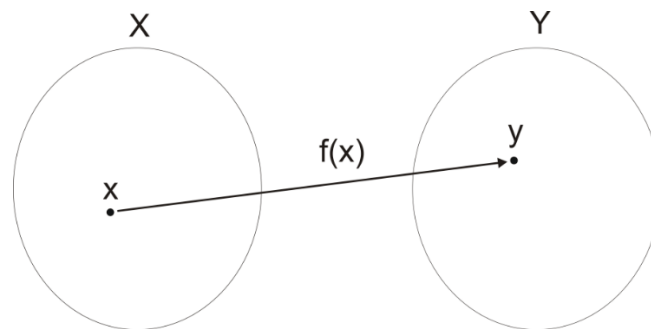


Funkcja kwadratowa

Funkcja - obiekt matematyczny, zdefiniowany dla zbioru X (dziedzina) oraz Y (przeciwdziedzina). Funkcja w sposób jednoznaczny przyporządkowuje każdemu elementowi zbioru X dokładnie jeden element zbioru Y (Rysunek 1). Funkcje oznaczamy zazwyczaj za pomocą liter f, g, h , itd.



Rysunek 1. Graficzne przedstawienie koncepcji funkcji $y = f(x)$.

Ogólna postać funkcji kwadratowej

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Kształt funkcji kwadratowej zależy od znaku współczynnika a . Dla $a > 0$ ramiona paraboli (tak nazywamy jej wykres) są zwrócone do góry, w przypadku $a < 0$ ramiona paraboli są zwrócone do dołu. Dla $a = 0$ funkcja kwadratowa redukuje się do funkcji liniowej. Do równania opisującego funkcję kwadratową $f(x)$ dodajmy neutralną różnicę dwóch identycznych ułamków, które stanowią pewną kombinację współczynników a oraz b .¹

$$f(x) = ax^2 + bx + c = ax^2 + bx + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} \right) + c$$

Oczywiście

¹ Zwróć uwagę na przyjętą w skrypcie konwencję: kolor **czzerwony** oznacza, że składniki występujące w równaniu znoszą się (ich suma lub różnica jest równa zero).

$$\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} = 0$$

$$f(x) = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$f(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \left(\frac{b^2}{4a} - c \right)$$

Teraz sprowadzamy do wspólnego mianownika wyrażenia znajdujące się w drugim nawiasie

$$f(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$$

Przyjmijmy, że $b^2 - 4ac = \Delta$ (grecka litera delta).

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a} \right)$$

Jest to **postać kanoniczna** funkcji kwadratowej $f(x)$.² Miejsca zerowe funkcji kwadratowej (zwane pierwiastkami) możemy łatwo wyznaczyć korzystając z jej postaci kanonicznej:

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$$

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$$

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

² Kanoniczny w matematyce oznacza najprostszy, ogólnie przyjęty, najkorzystniejszy pod pewnym względem.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \frac{\Delta}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \left(+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

lub

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \left(-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

A więc

$$\left(x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \vee \left(x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$\left(x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \vee \left(x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$\left(x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \vee \left(x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Otrzymane miejsca zerowe oznaczmy jako x_1 i x_2 :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Dla $\Delta > 0$ funkcja kwadratowa posiada dwa miejsca zerowe (przedstawione powyżej). Gdy $\Delta = 0$ funkcja kwadratowa posiada jedno miejsce zerowe:

$$\left(x = \frac{-b + \sqrt{0}}{2a}\right) \vee \left(x = \frac{-b - \sqrt{0}}{2a}\right) \rightarrow x_0 = -\frac{b}{2a}$$

Pomnóżmy teraz przez siebie miejsca zerowe funkcji kwadratowej

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2 + b\sqrt{\Delta} - b\sqrt{\Delta} - \Delta}{4a^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}$$

Wiemy jednak, że: $\Delta = b^2 - 4ac$. A więc

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Dodajmy teraz do siebie miejsca zerowe funkcji kwadratowej

$$x_1 + x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) + \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Wzory Viete'a - wzory wiążące miejsca zerowe funkcji kwadratowej z jej współczynnikami.

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Problem 1. Proszę rozwiązać równanie kwadratowe: $x^2 - 4x - 5 = 0$

Najpierw wyznaczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego, czyli Δ .

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36$$

Miejsca zerowe x_1 i x_2 wynoszą

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 6}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 6}{2} = 5$$

Problem 2. Proszę rozwiązać równanie kwadratowe: $x^2 + x + 1 = 0$

Najpierw wyznaczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego, czyli Δ .

$$\Delta = b^2 - 4ac = -3 \rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{-3}$$

Tym razem wyróżnik Δ trójmianu kwadratowego jest ujemny. Ale jak wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczby ujemnej? Przyjrzyjmy się **wzorom Viete'a**:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = +1$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -1$$

Pomimo, że nie możemy obliczyć ile wynosi $\sqrt{-3}$, widzimy że iloczyn miejsc zerowych jest równy $+1$, a ich suma wynosi -1 ! Jak to możliwe?

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-3} = \sqrt{-1 \cdot 3} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{3}i$$

gdzie $i = \sqrt{-1} \rightarrow i^2 = -1$.

Miejsca zerowe x_1 i x_2 rozważanej funkcji kwadratowej mają więc postać

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Iloczyn x_1 i x_2 jest liczbą rzeczywistą

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{4}i - \frac{3}{4}i^2 = 1$$

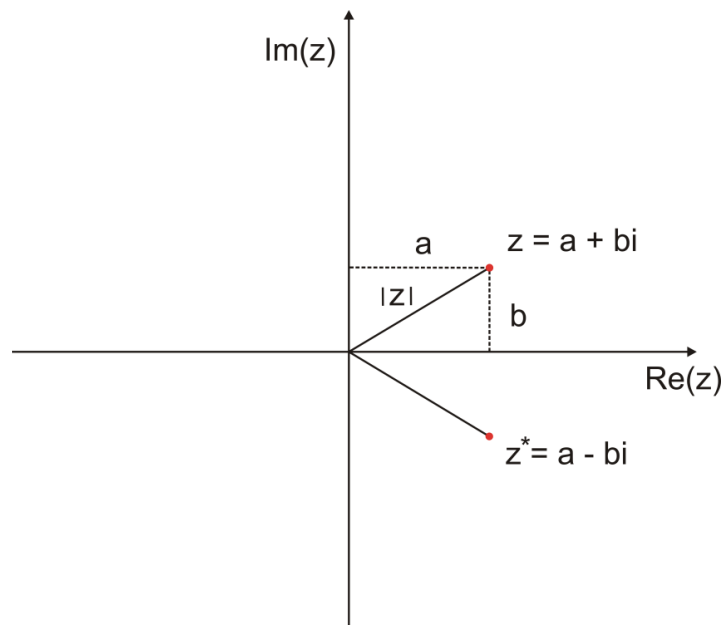
Suma x_1 i x_2 jest liczbą rzeczywistą

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = -1$$

Miejsca zerowe x_1 i x_2 funkcji kwadratowej $x^2 + x + 1$ są liczbami zespolonymi: $z = a + bi$ (**postać algebraiczna**), gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Liczby zespolone $z = a$ ($b = 0$) to liczby rzeczywiste. Liczby zespolone $z = bi$ ($a = 0$) to liczby **urojone** - są jednak równie realne jak liczby rzeczywiste. Liczba zespolona z posiada również **reprezentację geometryczną**: jest punktem o współrzędnych (a, b) na **płaszczyźnie zespolonej** (płaszczyźnie Arganda). Na płaszczyźnie zespolonej (Rysunek 2) liczby rzeczywiste stanowią punkty o współrzędnych $(a, 0)$: punkty te tworzą dobrze nam znaną oś liczbową. Liczby zespolone możemy traktować jako **uporządkowane pary liczb rzeczywistych** (a, b) , na których zdefiniowane są działania algebraiczne jak dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie. **Liczba sprzężona** względem liczby zespolonej z różni się od niej jedynie znakiem przy jednostce urojonej - sprzężenie liczby zespolonej z oznaczamy gwiazdką.

$$z = a + bi$$

$$z^* = a - bi$$



Rysunek 2. Płaszczyzna zespolona na której zaznaczono liczbę zespoloną z oraz jej sprzężenie zespolone z^* .

Odcinek łączący liczbę zespoloną $z = a + bi$ z punktem $(0,0)$ płaszczyzny Arganda nazywamy **modułem liczby zespolonej** i oznaczamy $|z|$. Dla każdej liczby zespolonej zachodzi relacja: $|z| \geq 0$. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa możemy wykazać, że prawdziwe jest równanie:

$$a^2 + b^2 = |z|^2$$

Ale zachodzi również:

$$z \cdot z^* = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$$

A więc iloczyn liczby zespolonej z i liczby zespolonej do niej sprzężonej z^* jest równy **kwadratowi modułu** liczby zespolonej z .

$$z \cdot z^* = |z|^2$$

Problem 3. Proszę wyznaczyć liczbę sprzężoną względem $z = 2 + 3i$.

$$z^* = 2 - 3i$$

Problem 4. Proszę wyznaczyć liczbę sprzężoną względem $z = 2 - 3i$.

$$z^* = 2 + 3i$$

Problem 5. Proszę wyznaczyć liczbę sprzężoną względem $z = 2$.

$$z = 2 + 0i$$

$$z^* = 2 - 0i = z$$

Dla liczby rzeczywistej $a \in \mathbb{R}$ zachodzi relacja $a^* = a$. Dlatego możemy zapisać $a^2 = a \cdot a^*$.

Wnioski: liczby rzeczywiste są liczbami zespolonymi postaci $z = a + bi$, dla których $b = 0$. Liczby zespolone rozszerzają koncepcję jednowymiarowej osi liczbowej na płaszczyznę zespoloną (płaszczyznę Arganda).