

# ANALIZA DYNAMIKI ZJAWISK (*dok.*)

1. szereg czasowy, chronologiczny (momentów, okresów)
2. średni poziom zjawiska w czasie (średnia arytmetyczna, średnia chronologiczna)
3. miary dynamiki (indeksy indywidualne, agregatowe)
4. średnie tempo zmian zjawiska w czasie
5. **wygładzanie szeregu czasowego** (mechaniczne, analityczne)
6. **analiza wahań okresowych** (wskaźniki sezonowości)

## WYGŁADZANIE szeregu czasowego

Wygładzanie jest to zabieg prowadzący do:

- eliminacji wahań i do
- wyodrębnienia tendencji rozwojowej badanego zjawiska (tendencja rosnąca, malejąca bądź stabilizacja).

Szeregi czasowe wygładzamy stosując metody:

1. mechaniczną (wykorzystanie średnich ruchomych) oraz
2. analityczną (dopasowanie odpowiedniej funkcji do danych szeregu czasowego).

# Wyglądanie MECHANICZNE

## (średnie ruchome $k$ -okresowe)

Oznaczmy kolejne wartości szeregu czasowego:

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-2}, y_{n-1}, y_n$$

Średnie ruchome wyznaczamy różnie w zależności od ich długości ( $k$ ).

Inaczej gdy  $k$  jest nieparzyste, np.  $k = 3, 5, 7$ , itd.

Inaczej zaś gdy  $k$  jest parzyste, np.  $k = 2, 4, 6$ , itd.

Gdy  $k$  jest nieparzyste (np.  $k=3$ ), to średnie ruchome wyznaczają się następująco:

$$\bar{y}_2 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad \bar{y}_3 = \frac{y_2 + y_3 + y_4}{3},$$

$$\bar{y}_{n-1} = \frac{y_{n-2} + y_{n-1} + y_n}{3}$$

*itd. aż do przedostatniego okresu*

Zauważmy, że przy  $k=3$  straciliśmy jedną informację na początku i jedną na końcu szeregu czasowego ( $1+1=2$  straty).

Przy  $k=5$  straty wyniosą już  $2+2=4$ , a przy  $k=7$  wyniosą aż  $3+3=6$ .

**REGUŁA:** im dłuższa średnia ruchoma (im większe  $k$ ), tym większe straty na informacji, ale za to lepsze wygładzenie i możliwość zaobserwowania tendencji rozwojowej badanego zjawiska.

Gdy  $k$  jest parzyste (np.  $k=4$ ), to średnie ruchome wyznacza się następująco (tzw. średnia scentrowana):

$$\bar{y}_3 = \frac{\frac{1}{2}y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{1}{2}y_5}{4},$$

$$\bar{y}_4 = \frac{\frac{1}{2}y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + \frac{1}{2}y_6}{4}, \quad \text{itd. aż do}$$

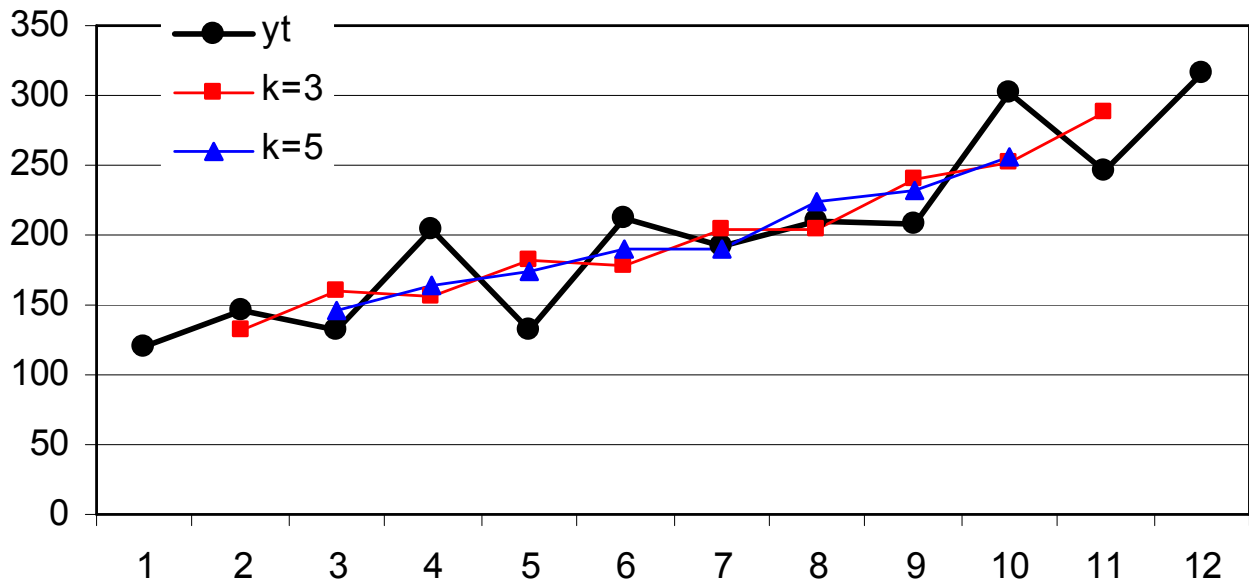
$$\bar{y}_{n-2} = \frac{\frac{1}{2}y_{n-4} + y_{n-3} + y_{n-2} + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n}{4}$$

## PRZYKŁAD 1

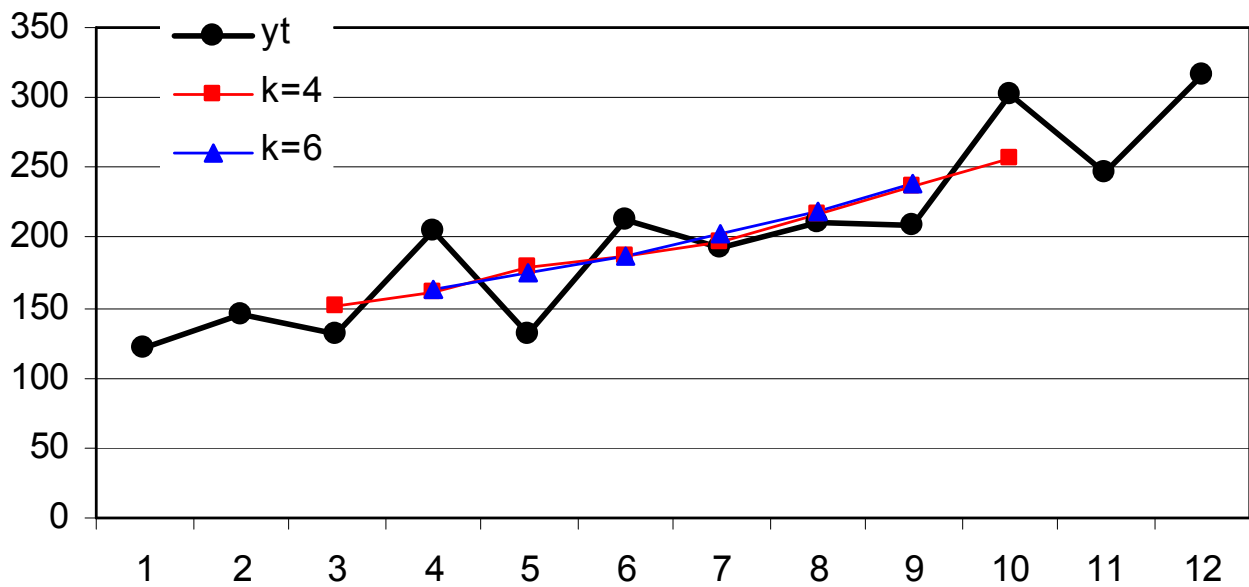
Obroty ( $y_t$ ) firmy ALFA [w tys. zł] w ciągu 12 kolejnych okresów ( $t$ ) przedstawia poniższa tabela. W dwóch ostatnich kolumnach pokazano średnie ruchome o różnej długości ( $k$  nieparzyste i parzyste)

okres	obroty	średnie ruchome			
		nieparzyste		parzyste	
$t$	$y_t$	$k=3$	$k=5$	$k=4$	$k=6$
1	121	x	x	x	x
2	146		x	x	x
3	132				x
4	204				
5	132	183	174	178	
6	212	179	190	186	187
7	192	205	191	196	202
8	211	204	225	217	219
9	209	241	232	236	238
10	303	253	257	256	x
11	247	289	x	x	x
12	316	x	x	x	x

### Obroty firmy ALFA (wygładzanie $k$ nieparzyste)



### Obroty firmy ALFA (wygładzanie $k$ parzyste)



# Wyglądanie ANALITYCZNE (liniowa funkcja TRENDU)

Wyglądanie szeregu czasowego polega tutaj na oszacowaniu liniowej funkcji trendu:

$$\hat{y}_t = at + b$$

Nieznane parametry ***a*** i ***b*** wyliczamy na podstawie danych z szeregu czasowego stosując następujące wzory:

$$a = \frac{\sum_{t=1}^n (t - \bar{t})(y_t - \bar{y})}{\sum_{t=1}^n (t - \bar{t})^2}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{t}$$

***a*** – oznacza okresowe tempo wzrostu ( $a > 0$ ) lub ubytku ( $a < 0$ ) wielkości badanego zjawiska

***b*** – oznacza stan zjawiska w okresie wyjściowym (tzn. dla  $t=0$ )

## PRZYKŁAD 2

W tabeli zawarte są obliczenia pomocnicze przy wyznaczaniu liniowej funkcji trendu dla obrotów firmy ALFA.

W ostatniej kolumnie pokazano teoretyczne wartości obrotów wyliczone na podstawie oszacowanej funkcji trendu.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
$t$	$y_t$	$(t - \bar{t})$	$(y_t - \bar{y})$	$(3)*(4)$	$(t - \bar{t})^2$	$\hat{y}_t$
1	121					
2	146					
3	132					
4	204	-2,5	2	-5,0	6,25	163
5	132	-1,5	-70	105,0	2,25	179
6	212	-0,5	10	-5,0	0,25	194
7	192	0,5	-10	-5,0	0,25	210
8	211	1,5	9	13,5	2,25	226
9	209	2,5	7	17,5	6,25	241
10	303	3,5	101	353,5	12,25	257
11	247	4,5	45	202,5	20,25	273
12	316	5,5	114	627,0	30,25	288
		x	x			x

$$\bar{t} = \frac{78}{12} = 6,5$$

$$\bar{y} = \frac{2425}{12} = 202$$

$$a = \frac{2246,5}{143} = 15,7$$

$$b = 202 - 15,7 \times 6,5 = 100$$

Zatem funkcja trendu opisująca obroty firmy ALFA ma postać:

$$\hat{y}_t = 15,7 t + 100$$

Do oceny dopasowania linii trendu do danych empirycznych (rzeczywiste obroty firmy ALFA) służy współczynnik zbieżności ( $\varphi^2$ ):

$$\varphi^2 = \frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2}{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2} \quad \text{gdzie} \quad 0 \leq \varphi^2 \leq 1$$

Im  $\varphi^2$  jest bliższy 0, tym dopasowanie jest **lepsze**.

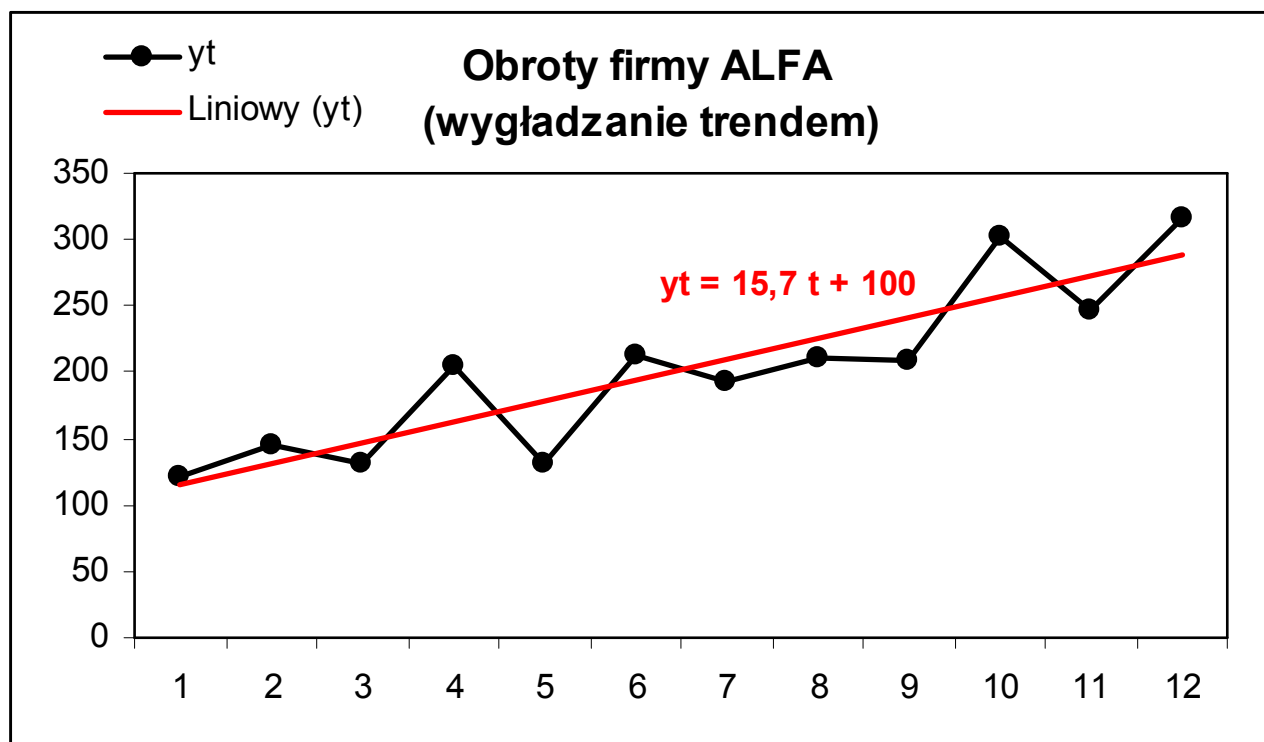
**Popularniejszą** miarą dopasowania jest współczynnik determinacji ( $R^2$ ):

$$R^2 = 1 - \varphi^2 \quad \text{gdzie} \quad 0 \leq R^2 \leq 1$$

Tutaj im  $R^2$  jest bliższy 1, tym dopasowanie jest **lepsze**.

**Popularna interpretacja  $R^2$ :**

liniowa funkcja trendu w ( $R^2 \times 100$ )% opisuje kształtowanie się badanego zjawiska.



**PRZYKŁAD 3 (c.d. przykładu 2)**

W tabeli zawarte są obliczenia pomocnicze przy wyliczaniu współczynnika zbieżności ( $\varphi^2$ ) dla liniowej funkcji trendu obrotów firmy ALFA.

Przypomnijmy, że średni kwartalny poziom obrotów w firmie ALFA wyniósł:

$$\bar{y} = \frac{2425}{12} = 202$$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
$t$	$y_t$	$\hat{y}_t$	$(y_t - \hat{y}_t)$	$(y_t - \bar{y})$	$(y_t - \hat{y}_t)^2$	$(y_t - \bar{y})^2$
1	121	116				
2	146	131				
3	132	147	-15	-70	225	4900
4	204	163	41	2	1681	4
5	132	179	-47	-70	2209	4900
6	212	194	18	10	324	100
7	192	210	-18	-10	324	100
8	211	226	-15	9	225	81
9	209	241	-32	7	1024	49
10	303	257	46	101	2116	10201
11	247	273	-26	45	676	2025
12	316	288	28	114	784	12996
<i>razem</i>			x	x		

$$\varphi^2 = \frac{9838}{45053} = 0,218$$

$$R^2 = 1 - 0,218 = 0,782$$

Liniowa funkcja trendu  $\hat{y}_t = 15,7 t + 100$  wygładzająca wahania przypadkowe opisuje obroty firmy ALFA w 78,2% ( $R^2=0,782$ ). Wartość współczynnika determinacji  $R^2$  zauważalnie odbiega od jedności (1).  
**WNIOSEK:**

obok wahań przypadkowych występują również inne wahania, np. wahania sezonowe (cykliczne).



# Analiza WAHAŃ OKRESOWYCH

Aby wyodrębnić wahania sezonowe (cykliczne) w szeregu o  $n$  okresach dzielimy ten szereg na  $S$  cykli.

Podział musi być taki, aby w każdym cyklu występowała stała liczba  $k$  faz.

Działania mające na celu wyodrębnienie wahań sezonowych są następujące:

1. Wyglądzamy szereg czasowy  $\{y_t\}$  analitycznie (lub mechanicznie średnią ruchomą  $k$ -okresową).  
Na podstawie wyznaczonej funkcji trendu obliczamy wartości teoretyczne  $\{\hat{y}_t\}$ .
2. Uwalniamy szereg czasowy od trendu. W tym celu wyliczamy wielkości  $w_t = y_t / \hat{y}_t$ . Wielkości te zawierają wahania przypadkowe i sezonowe.
3. Pozbywamy się wahań przypadkowych w wielkościach  $w_t$ .

W tym celu dla jednoimiennych okresów  $i$  (tj. okresów należących do tej samej fazy) wyliczamy ich średnią arytmetyczną

$$C'_i = \frac{\sum_{j=0}^{s-1} w_{i+j \times k}}{s} \quad (\text{dla każdej fazy } i=1, 2, \dots, k).$$

Są to tzw. **SUROWE wskaźniki sezonowości**.

**INTERPRETACJA (wskaźnik surowy – 1) × 100% :**

”O ile procent poziom zjawiska w danej fazie cyklu jest wyższy (znak *plus*) lub niższy (znak *minus*) od poziomu jaki byłby osiągnięty, gdyby nie było wahań cyklicznych, a rozwój następował zgodnie z trendem”.

4. Suma takich wskaźników dla wszystkich faz powinna być równa  $k$ .  
Jeżeli tak nie jest, to należy surowe wskaźniki sezonowości podzielić przez odpowiedni współczynnik korygujący (= [suma wskaźników surowych] /  $k$ ). Otrzymamy w ten sposób

**CZyste wskaźniki sezonowości**.

**PRZYKŁAD 4 (c.d. przykładu 3)**

Liczba okresów w szeregu czasowym  $n=12$  (12 danych kwartalnych o obrotach firmy ALFA).

Liczba cykli  $s=3$  (bo szereg opisuje dane kwartalne przez 3 lata).

Liczba faz w każdym cyklu  $k=4$  (bo w każdym roku są 4 kwartały).

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
$t$	$y_t$	$\hat{y}_t$	$\frac{y_t}{\hat{y}_t}$	kwartał	I	II	III	IV
1	121	116	1,04	I	1,04			
2	146	131	1,11	II		1,11		
3	132	147	0,90	III			0,90	
4	204	163	1,25	IV				1,25
5	132	179		I				
6	212	194		II				
7	192	210		III				
8	211	226		IV				
9	209	241	0,87	I	0,87			
10	303	257	1,18	II		1,18		
11	247	273	0,90	III			0,90	
12	316	288	1,10	IV				1,10
<i>razem</i>	<b>X</b>	<b>X</b>	<b>X</b>	<b>X</b>				

<b>SUROWE wskaźniki sezonowości</b>						<b>0,903</b>	<b>1,093</b>
	<b><math>\Sigma</math></b>		<b><math>\Sigma / 4</math></b>				
<b>CZyste wskaźniki sezonowości</b>						<b>0,902</b>	<b>1,091</b>

Surowe wskaźniki sezonowości:

$$/ 3 = \underline{0,883}; \quad / 3 = \underline{1,127}; \quad 2,71 / 3 = \underline{0,903}; \quad 3,28 / 3 = \underline{1,093}$$

Suma surowych wskaźników sezonowości wynosi: **4,006**

Współczynnik korygujący:  **$4,006 / 4 = 1,0015$**

Czyste wskaźniki sezonowości:

$$0,833 / 1,0015 = \underline{0,882} \quad 1,127 / 1,0015 = \underline{1,125} \quad 0,903 / 1,0015 = \underline{0,902}$$

$$1,093 / 1,0015 = \underline{1,091}$$

Suma czystych wskaźników sezonowości wynosi: **4,000**

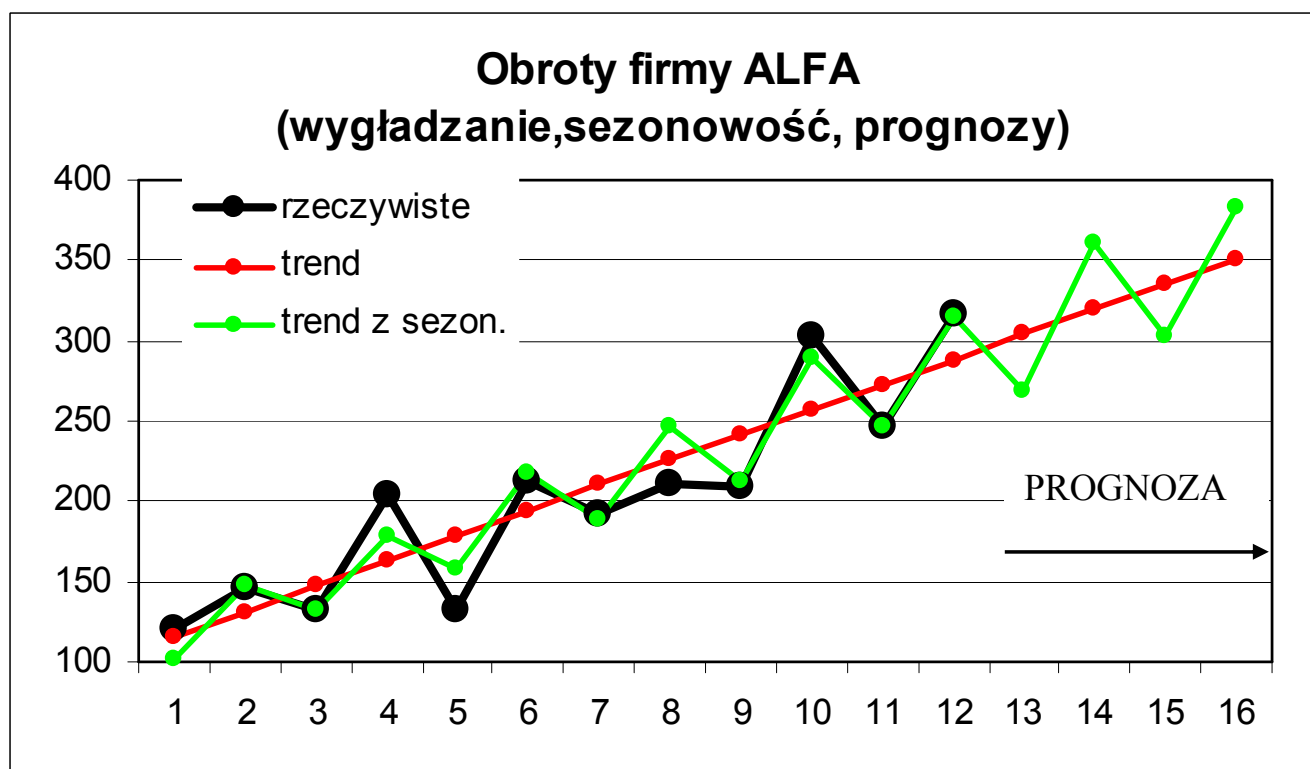
Jeżeli pomnożymy w każdym okresie teoretyczny poziom zjawiska  $\hat{y}_t$  przez odpowiedni dla danego okresu wskaźnik sezonowości, to otrzymamy teoretyczny poziom zjawiska uwzględniający wahania sezonowe.

### PRZYKŁAD 5 (c.d. przykładu 4)

Wyznamy prognozę obrotów firmy ALFA na kolejny rok (4 kolejne kwartały: 13, 14, 15 i 16) wykorzystując funkcję trendu

$\hat{y}_t = 15,7 t + 100$  oraz czyste wskaźniki sezonowości (0,882 dla kwartałów I; 1,125 dla II; 0,902 dla III oraz 1,091 dla kwartałów IV).

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
$t$	dane rzeczywiste $y_t$	dane teoretyczne z trendu $\hat{y}_t$	kwartał	wskaźniki sezonowości	dane teoretyczne skorygowane $\hat{y}_t$
1	121	116	I	0,882	102
2	146	131	II	1,125	147
3	132	147	III	0,902	133
4	204	163	IV	1,091	178
5	132	179	I		
6	212	194	II		
7	192	210	III		
8	211	226	IV		
9	209	241	I	0,882	213
10	303	257	II	1,125	289
11	247	273	III	0,902	246
12	316	288	IV	1,091	314
<b>PROGNOZY dla kolejnych kwartałów</b>					
13	?		I		
14	?		II		
15	?	336	III	0,902	303
16	?	351	IV	1,091	383



**W domu:** Dla danych z kolumn (2) i (6) ostatniej tabeli ( $t=1,2,\dots,12$ ) – strona 11; policz współczynnik zbieżności i współczynnik determinacji (gotowa tabela poniżej). Sprawdź o ile poprawiło się dopasowanie na skutek uwzględnienia sezonowości.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
$t$	$y_t$	$\hat{y}_t$ <i>Skor.sez.</i>	$(y_t - \hat{y}_t)$	$(y_t - \bar{y})$	$(y_t - \hat{y}_t)^2$	$(y_t - \bar{y})^2$
1	121	102				
2	146	147				
3	132	133				
4	204	178				
5	132	158				
6	212	218				
7	192	189				
8	211	247				
9	209	213				
10	303	289				
11	247	246				
12	316	314				
<b>razem</b>						