

# CHARAKTERYSTYKI LICZBOWE STRUKTURY ZBIOROWOŚCI (Parametry statystyczne)

**PARAMETRY STATYSTYCZNE** - liczby służące do syntetycznego opisu struktury zbiorowości statystycznej.

**PARAMETRY DZIELIMY NA 4 GRUPY:**

1. miary położenia
2. miary zmienności (dyspersji, rozproszenia)
3. miary asymetrii (skośności)
4. miary koncentracji

## MIARY POŁOŻENIA

**Miary przeciętne charakteryzują średni lub typowy poziom wartości cechy.**

**Miary położenia dzielą się na miary przeciętne i kwantyle. Podział miar położenia jest następujący:**

1. miary klasyczne (średnia: arytmetyczna, harmoniczna, geometryczna) oraz
2. miary pozycyjne (modalna, kwantyle)

**Wśród kwantyli najczęściej mówi się o:**

1. kwartylach (pierwszy, drugi zwany medianą, trzeci) - podział zbiorowości na 4 części,
2. decylach - podział zbiorowości na 10 części,
3. centylach (percentylach) - podział zbiorowości na 100 części.

# ŚREDNIA arytmetyczna

Średnią arytmetyczną definiuje się jako sumę wartości cechy mierzalnej przez liczebność populacji. Średnia jest wielkością mianowaną tak samo jak badana cecha.

## Dla szeregów szczegółowych

Tutaj wyliczamy tzw. średnią arytmetyczną prostą (nieważoną), która ma postać:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

### PRZYKŁAD 1

Weźmy dane z przykładu (wykład 1) o liczbie braków:

0,  
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2,  
2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4

$$\bar{x} = \frac{0 + \dots + 0 + 1 + \dots + 1 + 2 + \dots + 2 + 3 + \dots + 3 + 4 + 4}{50}$$

$$\bar{x} = \frac{40}{50} = 0,8$$

Średnia liczba braków przypadająca na 1 wyrób wynosi w tym przykładzie 0,8 [brak/szt.].

## Dla szeregów rozdzielczych punktowych

Tutaj wyliczamy tzw. średnią arytmetyczną ważoną, która ma postać:

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i n_i}{n}$$

lub

$$\bar{x} = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_k w_k = \sum_{i=1}^k x_i w_i$$

W przykładzie z liczbą braków obliczenia według pierwszego wzoru (z liczebnościami  $n_i$ ) przedstawia poniższa tabela.

<i>numer klasy</i>	<i>liczba braków</i>	<i>liczba wyrobów (liczebność)</i>	<i>obliczenia do średniej</i>
<i>i</i>	<i>x<sub>i</sub></i>	<i>n<sub>i</sub></i>	<i>x<sub>i</sub> n<sub>i</sub></i>
<b>1</b>	<b>0</b>	<b>30</b>	
<b>2</b>	<b>1</b>	<b>8</b>	
<b>3</b>	<b>2</b>	<b>6</b>	
<b>4</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	
<b>5</b>	<b>4</b>	<b>2</b>	
<b>razem</b>	<b>×</b>	<b>50</b>	

$$\bar{x} = \frac{40}{50} = 0,8$$

**Obliczenia średniej liczby braków z wykorzystaniem drugiego wzoru (ze wskaźnikami struktury  $w_i$ )) pokazuje kolejna tabela.**

<i>numer klasy</i>	<i>liczba braków</i>	<i>wskaźnik struktury</i>	<i>obliczenia do średniej</i>
<i>i</i>	<i>x<sub>i</sub></i>	<i>w<sub>i</sub></i>	<i>x<sub>i</sub> w<sub>i</sub></i>
<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0,60</b>	
<b>2</b>	<b>1</b>	<b>0,16</b>	
<b>3</b>	<b>2</b>	<b>0,12</b>	
<b>4</b>	<b>3</b>	<b>0,08</b>	
<b>5</b>	<b>4</b>	<b>0,04</b>	
<b>razem</b>	<b>×</b>	<b>1,00</b>	

$$\bar{x} = 0,80$$

## Dla szeregów rozdzielczych przedziałowych

Tutaj wyliczamy tzw. średnią arytmetyczną ważoną, która ma postać:

$$\bar{x} = \frac{\dot{x}_1 n_1 + \dot{x}_2 n_2 + \dots + \dot{x}_k n_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k \dot{x}_i n_i}{n}$$

lub

$$\bar{x} = \dot{x}_1 w_1 + \dot{x}_2 w_2 + \dots + \dot{x}_k w_k = \sum_{i=1}^k \dot{x}_i w_i$$

gdzie  $\dot{x}_i$  jest środkiem przedziału klasowego wyliczanym

następująco:

$$\dot{x}_i = \frac{x_{0i} + x_{1i}}{2}$$

Należy pamiętać, że przy pogrupowaniu danych źródłowych w szereg rozdzielczy przedziałowy następuje pewna utrata informacji. Jeżeli policzymy średnią dla szeregu szczegółowego lub szeregu rozdzielczego punktowego, to wynik będzie dokładny i taki sam. Dla danych w postaci szeregu rozdzielczego przedziałowego średnia będzie już przybliżeniem. Tym większym, im szersze są przedziały klasowe, im jest ich mniej, itd.

Np. dla danych źródłowych o czasach dojazdu pracowników firmy

ZAUR otrzymamy:

$$\bar{x} = \frac{8080}{200} = 40,44 \text{ minuty.}$$

**PRZYKŁAD 2**

Obliczenia dla średniej w przykładzie z czasem dojazdu w firmie ZAUR (wykład 1) według pierwszego wzoru (z liczebnościami  $n_i$ ) przedstawia poniższa tabela.

<i>numer klasy</i>	<i>czas dojazdu w ZAUR</i>	<i>środek przedziału</i>	<i>liczba pracowników</i>	<i>obliczenia do średniej</i>
<i>i</i>	$x_{0i} - x_{1i}$	$\dot{x}_i$	$n_i$	$\dot{x}_i n_i$
1	5 – 15	10	10	
2	15 – 25	20	20	
3	25 – 35	30	30	
4	35 – 45	40	50	
5	45 – 55	50	80	4000
6	55 – 65	60	10	600
<b>razem</b>	×	×	<b>200</b>	

$$\bar{x} = \frac{8000}{200} = 40$$

Obliczenia dla średniej według drugiego wzoru (ze wskaźnikami struktury  $w_i$ ) przedstawia kolejna tabela.

<i>numer klasy</i>	<i>czas dojazdu w ZAUR</i>	<i>środek przedziału</i>	<i>wskaźnik struktury</i>	<i>obliczenia do średniej</i>
<i>i</i>	$x_{0i} - x_{1i}$	$\dot{x}_i$	$w_i$	$\dot{x}_i w_i$
1	5 – 15	10	0,05	
2	15 – 25	20	0,10	
3	25 – 35	30	0,15	
4	35 – 45	40	0,25	
5	45 – 55	50	0,40	20,0
6	55 – 65	60	0,05	3,0
<b>razem</b>	×	×	<b>1,00</b>	

$$\bar{x} = 40$$

# Ważniejsze własności ŚREDNIEJ arytmetycznej

1. Suma wartości cechy jest równa iloczynowi średniej arytmetycznej i liczebności populacji, tj.

$$n\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{lub} \quad n\bar{x} = \sum_{i=1}^k x_i n_i$$

2. Średnia arytmetyczna nie może być mniejsza od najmniejszej wartości cechy ani też większa od największej jej wartości

$$x_{\min} \leq \bar{x} \leq x_{\max}$$

3. Suma odchyleń poszczególnych wartości cechy od średniej jest równa zero

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0 \quad \text{lub} \quad \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}) n_i = 0$$

4. Średnią arytmetyczną oblicza się w zasadzie dla szeregów o zamkniętych klasach przedziałowych. Można klasy sztucznie domknąć (i policzyć średnią) tylko wtedy, gdy odsetek jednostek w tych klasach jest niewielki (do 5%). Gdy ten odsetek jest duży należy stosować miary pozycyjne zamiast średniej.
5. Średnia arytmetyczna jest czuła na skrajne wartości cechy. Są to wartości cechy dla jednostek nietypowych w badanej zbiorowości i przypadkowo (niepoprawnie) włączonych do badanej populacji.

# ŚREDNIA harmoniczna

Średnią harmoniczną stosujemy wtedy, gdy wartości cechy są podane w przeliczeniu na stałą jednostkę innej cechy, czyli w postaci tzw. wskaźników natężenia (na przykład: prędkość pojazdu [km/godz.], cena jednostkowa [zł/szt.], spożycie [kg/osoba], itp.)

$$\bar{x}_H = \frac{\sum_{i=1}^k l_i}{\sum_{i=1}^k m_i} = \frac{\sum_{i=1}^k l_i}{\sum_{i=1}^k \frac{l_i}{x_i}}$$

$x_i$  - wartość  $i$ -tego wariantu badanej cechy

$l_i$  - wartość  $i$ -tego wariantu licznika badanej cechy

$m_i$  - wartość  $i$ -tego wariantu mianownika badanej cechy

## PRZYKŁAD 3

Kierowca przejechał trasę ze zmienną prędkością. Odcinek A o długości 30 km przejechał z prędkością 50 km/godz. Odcinek B o długości 81 km przejechał z prędkością 90 km/godz. Z jaką średnią prędkością pokonał trasę kierowca?

Badaną cechą  $X$  jest prędkość wyrażona w [km/godz.].

$i$	<i>trasa</i> [km]	<i>prędkość</i> [km/godz.]	<i>czas</i> [godz.]
	$l_i$	$x_i$	$m_i = l_i / x_i$
1	30	50	
2	81	90	0,9
<b>Razem</b>	<b>111</b>	×	

$$\begin{aligned}\bar{x}_H &= (30 + 81) / (30 / 50 + 81 / 90) = \\ &= 111 / (0,6 + 0,9) = 111 / 1,5 = \\ &= 74\end{aligned}$$



**PRZYKŁAD 4**

**Producent przetworów owocowych sprzedawał słoje z przetworami na targowisku.**

**W godzinach 6-10 sprzedawał słoje po 7 zł/slój i utargował 840 zł.**

**W godzinach 10-12 sprzedawał słoje po 6 zł/slój i utargował 360 zł.**

**W godzinach 12-16 sprzedawał słoje po 5 zł/slój i utargował 100 zł.**

**Jaka była średnia cena słoja sprzedanego w tym dniu?**

**Badaną cechą X jest cena słoja wyrażona w [zł/slój].**

<i>i</i>	<i>utarg</i> [zł]	<i>cena</i> [zł/slój]	<i>ilość</i> [slój]
	$l_i$	$x_i$	$m_i = l_i / x_i$
<b>1</b>	<b>840</b>	<b>7</b>	
<b>2</b>	<b>360</b>	<b>6</b>	
<b>3</b>	<b>100</b>	<b>5</b>	<b>20</b>
<b>Razem</b>	<b>1300</b>	<b>×</b>	

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_H &= (840 + 360 + 100) / (840 / 7 + 360 / 6 + 100 / 5) = \\
 &= 1300 / (120 + 60 + 20) = 1300 / 200 = \\
 &= 6,5
 \end{aligned}$$

# ŚREDNIA geometryczna

Średnią geometryczną określa się wzorem:

$$\bar{x}_G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

Średnia ta znajduje szczególne zastosowania w analizie dynamiki zjawisk (*poczekaj na stosowny wykład*).

# MODALNA (Dominanta)

**Modalna ( $M_o$ ) zwana też dominantą ( $D$ ) jest to wartość cechy, która występuje najczęściej w badanej zbiorowości.**

## ZALECENIA przy wyznaczaniu modalnej

1. Modalną wyznaczamy i sensownie interpretujemy tylko wtedy, gdy dane są pogrupowane w szereg rozdzielczy (punktowy lub przedziałowy).
2. Liczebność populacji powinna być dostatecznie duża.
3. Diagram lub histogram liczebności (częstości) ma wyraźnie zaznaczone jedno maksimum (rozkład jednomodalny).
4. Dla danych pogrupowanych w szereg rozdzielczy przedziałowy modalna nie występuje w skrajnych przedziałach (pierwszym lub ostatnim) - przypadek skrajnej asymetrii. Nie da się w takim przypadku analitycznie wyznaczyć modalnej.
5. Dla danych pogrupowanych w szereg rozdzielczy przedziałowy przedział modalnej oraz dwa sąsiednie przedziały (poprzedzający i następujący po przedziale modalnej) powinny mieć taką samą rozpiętość.

## Modalna dla szeregów rozdzielczych punktowych

### PRZYKŁAD 5

Badano czas obróbki detalu [minuta] przez pracowników firmy ZAUR. Otrzymane dane pogrupowano w szereg rozdzielczy punktowy.

<i>numer klasy</i>	<i>czas obróbki [minuta]</i>	<i>liczba pracow- ników</i>	<i>wskaźnik struktury (częstość)</i>
<i>i</i>	<i>x<sub>i</sub></i>	<i>n<sub>i</sub></i>	<i>w<sub>i</sub></i>
1	10	10	0,05
2	11	30	0,15
3	12	80	0,40
4	13	50	0,25
5	14	20	0,10
6	15	10	0,05
<i>razem</i>	×	200	1,00

Łatwo zauważyć, że największa liczba pracowników (a zarazem największa częstość) znajduje się w klasie 3 ( $m=3$ ). Zatem modalna wynosi:

$$M_o = x_m = x_3 = 12$$

**WNIOSEK:** najczęściej występujący czas obróbki detalu wśród pracowników firmy ZAUR to 12 minut.

**W domu:** policz samodzielnie średni czas obróbki i porównaj z modalną.

## Modalna dla szeregów rozdzielczych przedziałowych

Modalną wyliczamy tutaj wg następującego wzoru:

$$M_o = x_{0m} + h_m \frac{n_m - n_{m-1}}{n_m - n_{m-1} + n_m - n_{m+1}}$$

$m$  - numer klasy (przedziału) z modalną

$x_{0m}$  - dolny kraniec przedziału modalnej

$h_m$  - rozpiętość przedziału modalnej ( $h_m = x_{1m} - x_{0m}$ )

$n_m$  - liczebność przedziału modalnej

$n_{m-1}$  ( $n_{m+1}$ ) - liczebność dla przedziałów sąsiadujących z przedziałem modalnej

### PRZYKŁAD 6

Wykorzystamy badanie czasu dojazdu w firmie ZAUR (wykład 1).

<i>numer klasy</i>	<i>czas dojazdu w ZAUR</i>	<i>liczba pracow- ników</i>
<i>i</i>	$x_{0i} - x_{1i}$	$n_i$
1	5 – 15	10
2	15 – 25	20
3	25 – 35	30
4	35 – 45	50
5	45 – 55	80
6	55 – 65	10
<i>razem</i>	×	200

$$\begin{aligned}
 M_o &= 45 + 10 \times \frac{80 - 50}{80 - 50 + 80 - 10} = \\
 &= 45 + 10 \times 30/100 = 45 + 3 = 48
 \end{aligned}$$

**WNIOSEK:** najczęściej występującym czasem dojazdu wśród pracowników firmy ZAUR jest **48** minut.

Z wykorzystaniem **częstości** (wskaźniki struktury) wzór na modalną jest następujący:

$$M_o = x_{0m} + h_m \frac{w_m - w_{m-1}}{w_m - w_{m-1} + w_m - w_{m+1}}$$

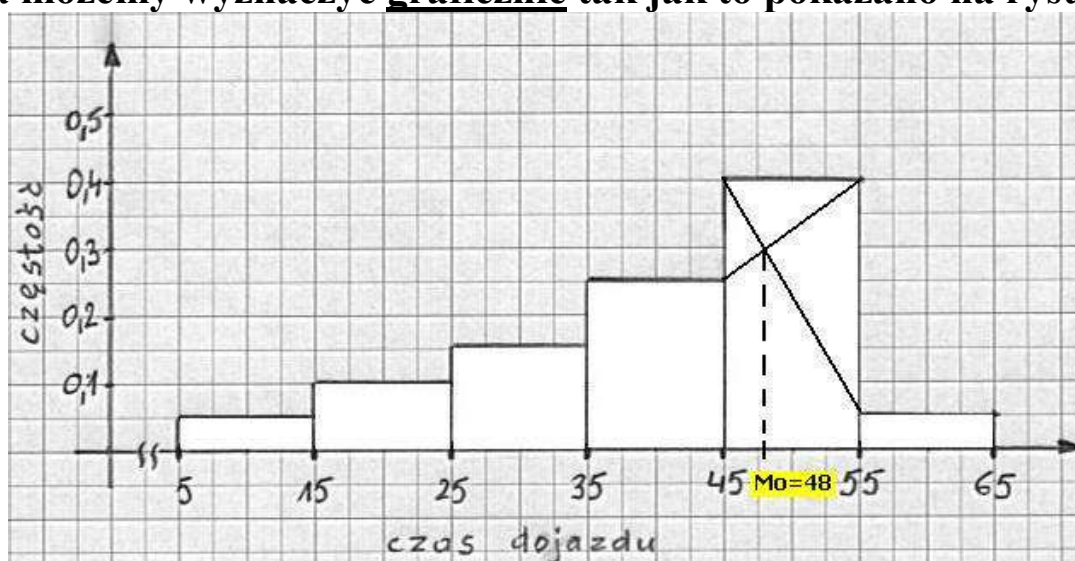
$w_m$  - częstość (wskaźnik struktury) przedziału modalnej

$w_{m-1}$  ( $w_{m+1}$ ) - częstość dla przedziałów sąsiadujących z przedziałem modalnej

<i>numer klasy</i>	<i>czas dojazdu w ZAUR</i>	<i>wskaźnik struktury</i>
<i>i</i>	$x_{0i} - x_{1i}$	$w_i$
1	5 – 15	0,05
2	15 – 25	0,10
3	25 – 35	0,15
4	35 – 45	0,25
5	45 – 55	0,40
6	55 – 65	0,05
<i>razem</i>	×	1,00

$$\begin{aligned}
 M_o &= 45 + 10 \times \frac{0,4 - 0,25}{0,4 - 0,25 + 0,4 - 0,05} = \\
 &= 45 + 10 \times 0,15 / 0,5 = 45 + 3 = 48
 \end{aligned}$$

Modalna możemy wyznaczyć graficznie tak jak to pokazano na rysunku.



## KWARTYLE

Kwartyle to takie wartości cechy  $X$ , które dzielą zbiorowość na cztery równe części pod względem liczebności (lub częstości). Części te pozostają w określonych proporcjach do siebie.

Aby dokonywać takiego podziału zbiorowość musi być uporządkowana według rosnących wartości cechy  $X$ .

Każdy kwartył dzieli zbiorowość na dwie części, które pozostają do siebie w następujących proporcjach. I tak:

kwartył 1 ( $Q_I$ ) - 25% z lewej i 75% populacji z prawej strony kwartyła,

kwartył 2 ( $Q_{II}$ ) - 50% z lewej i 50% populacji z prawej strony kwartyła,

kwartył 3 ( $Q_{III}$ ) - 75% z lewej i 25% populacji z prawej strony kwartyła.

## Mediana

Mediana ( $M_e$ ) - wartość środkowa, inaczej: kwartył 2 ( $Q_{II}$ ).

Jest to taka wartość cechy  $X$ , która dzieli zbiorowość na dwie równe części, tj. połowa zbiorowości charakteryzuje się wartością cechy  $X$  mniejszą lub równą medianie, a druga połowa większą lub równą.

## Mediana dla szeregu szczegółowego

Szereg musi być posortowany rosnąco !!!

Wartość mediany wyznacza się inaczej gdy liczebność populacji ( $n$ ) jest nieparzysta, a inaczej gdy jest parzysta.

$$M_e = x_{\frac{n+1}{2}}$$

Dla  $n$  nieparzystego:

$$M_e = \frac{1}{2} \left( x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1} \right)$$

Dla  $n$  parzystego:

**PRZYKŁAD 7**

Zmierzono czas wykonania detali [minuta/ szt.] przez wybranego pracownika firmy ALFA i otrzymano następujący szereg szczegółowy:

10, 10, 10, 12, 12,      12, 12, 13, **13**, 13,  
13, 13, 14, 14, 15,      15, 15

Liczebność populacji jest nieparzysta:  $n=17$

$$M_e = x_{\frac{17+1}{2}} = x_{\frac{18}{2}} = x_9 = 13$$

**WNIOSEK:**

Dla połowy detali czas wykonania jednego detalu przez pracownika firmy ALFA był nie dłuższy niż ( $\leq$ ) 13 minut, a drugiej połowy detali był nie krótszy ( $\geq$ ) niż 13 minut.

**PRZYKŁAD 8**

Zmierzono czas wykonania detali [minuta/ szt.] przez wybranego pracownika firmy BETA i otrzymano następujący szereg szczegółowy:

10, 10, 11, 12, 12,      12, 12, 12, **12**, **13**,  
13, 13, 14, 14, 15,      15, 15, 16

Liczebność populacji jest parzysta:  $n=18$

$$M_e = \frac{1}{2} \left( x_{\frac{18}{2}} + x_{\frac{18}{2}+1} \right) = \frac{1}{2} (x_9 + x_{10}) = \frac{1}{2} (12 + 13) = 12,5$$

**WNIOSEK:**

Dla połowy detali czas wykonania jednego detalu przez pracownika firmy BETA był nie dłuższy niż ( $\leq$ ) 12,5 minuty, a dla drugiej połowy detali był nie krótszy ( $\geq$ ) niż 12,5 minuty.



## Mediana dla szeregu rozdzielczego punktowego

1. Ustalamy na początek tzw. numer mediany ( $N_{Me}$ ). Jest to połowa

liczebności populacji:  $N_{Me} = \frac{1}{2}n$  (albo ułamek  $\frac{1}{2}$  dla częstości).

2. Kumulujemy liczebności (albo częstości).

3. Znajdujemy klasę, w której po raz pierwszy przekroczony został numer mediany. Klasa ta ma numer  $m$ .

4. Wartość cechy  $X$  w klasie  $m$  jest medianą, t.j.  $M_e = x_m$ .

### PRZYKŁAD 9

Dane z przykładu 5 o czasie obróbki detalu [minuta] przez pracowników firmy ZAUR.

<i>numer klasy</i>	<i>czas obróbki [minuta]</i>	<i>liczba pracowników</i>	<i>skumulowana liczebność</i>	<i>skumulowana częstość</i>
<i>i</i>	<i>x<sub>i</sub></i>	<i>n<sub>i</sub></i>	<i>n<sub>i sk</sub></i>	<i>w<sub>i sk</sub></i>
1	10	10	10	0,05
2	11	30	40	0,20
3	12	80	120	0,60
4	13	50	170	0,85
5	14	20	190	0,95
6	15	10	200	1,00
<i>razem</i>	×	200	×	×

Liczebność populacji:  $n=200$

Numer mediany:

$$\bullet \quad N_{Me} = \frac{1}{2} \times 200 = 100 \quad (\text{dla liczebności}) \text{ albo}$$

$$\bullet \quad N_{Me}^{cz} = \frac{1}{2} \quad (\text{dla częstości})$$

Numer klasy z medianą:  $m=3$

Mediana:  $M_e = x_m = x_3 = 12$

**WNIOSEK:** Połowa pracowników firmy ZAUR obrabia detal nie dłużej niż ( $\leq$ ) 12 minut, a druga połowa nie krócej ( $\geq$ ) niż 12 minut.

## **Mediana dla szeregu rozdzielczego przedziałowego**

Wzór na medianę (przy wykorzystaniu liczebności):

$$M_e = x_{0m} + h_m \frac{N_{Me} - n_{m-1\ sk}}{n_m}$$

### **PRZYKŁAD 10**

Dane z przykładu 6 (badanie czasu dojazdu w firmie ZAUR).

<i>numer klasy</i>	<i>czas dojazdu w ZAUR</i>	<i>liczba pracowników</i>	<i>skumul. liczebność</i>
<i>i</i>	$x_{0i} - x_{li}$	$n_i$	$n_{i\ sk}$
1	5 – 15	10	10
2	15 – 25	20	30
3	25 – 35	30	60
4	35 – 45	50	110
5	45 – 55	80	190
6	55 – 65	10	200
<i>razem</i>	×	200	×

Liczebność populacji:  $n=200$

Numer mediany:  $N_{Me} = \frac{1}{2} \times 200 = 100$

Numer klasy z medianą:  $m=4$

$$\begin{aligned}
 M_e &= 35 + 10 \times \frac{100 - 60}{50} = \\
 &= 35 + 10 \times \frac{40}{50} = \\
 &= 35 + 8 = 43
 \end{aligned}$$

**WNIOSEK:** Połowa pracowników firmy ZAUR dojeżdża do pracy w czasie nie dłuższym ( $\leq$ ) niż 43 minuty, a druga połowa w czasie nie krótszym ( $\geq$ ) niż 43 minuty.

Wzór na medianę (przy wykorzystaniu częstości):

$$M_e = x_{0m} + h_m \frac{N_{Me}^{cz} - w_{m-1 sk}}{w_m}$$

### PRZYKŁAD 10 (c.d.)

<i>numer klasy</i>	<i>czas dojazdu w ZAUR</i>	<i>wskaźnik struktury (częstość)</i>	<i>skumul. częstość</i>
<i>i</i>	<i><math>x_{0i} - x_{1i}</math></i>	<i><math>w_i</math></i>	<i><math>w_{i sk}</math></i>
1	5 – 15	0,05	0,05
2	15 – 25	0,10	0,15
3	25 – 35	0,15	0,30
4	35 – 45	0,25	0,55
5	45 – 55	0,40	0,95
6	55 – 65	0,05	1,00
<i>razem</i>	×	1,00	×

Numer mediany:  $N_{Me}^{cz} = \frac{1}{2}$

Numer klasy z medianą:  $m=4$

$$\begin{aligned}
 M_e &= 35 + 10 \times \frac{0,50 - 0,30}{0,25} = \\
 &= 35 + 10 \times \frac{0,20}{0,25} = \\
 &= 35 + 8 = 43
 \end{aligned}$$

## Pozostałe kwartyle

Wszystkie kwartyle wyznaczamy podobnie jak kwartył 2 (czyli medianę) pamiętając w jakich proporcjach dzieli one zbiorowość.

Dla szeregów rozdzielczych pomocną może być tabela, w której zestawiono numery kwartyli.

kwartył	numer kwartyla	
	dla liczebności ( $N_Q$ )	dla częstości ( $N_Q^{cz}$ )
kwartył 1 ( $Q_I$ )	$N_{Q_I} = \frac{1}{4}n$	$N_{Q_I}^{cz} = \frac{1}{4} = 0,25$
kwartył 2 ( $Q_{II}$ ) mediana	$N_{Q_{II}} = \frac{2}{4}n = \frac{1}{2}n$	$N_{Q_{II}}^{cz} = \frac{1}{2} = 0,50$
kwartył 3 ( $Q_{III}$ )	$N_{Q_{III}} = \frac{3}{4}n$	$N_{Q_{III}}^{cz} = \frac{3}{4} = 0,75$

Kwartyle możemy wyznaczyć graficznie tak jak to pokazano na rysunku.

