

Rachunek prawdopodobieństwa

Rozdział 5. Rozkłady łączne

5.2. Momenty rozkładów łącznych.

Katarzyna Rybarczyk-Krzywdzińska

Przypomnienie

Niech $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją, a X będzie zmienną losową o rozkładzie dyskretnym, skupionym na zbiorze $\{s_1, s_2, \dots\}$.

Wówczas

$$\mathbb{E}h(X) = \sum_i h(s_i) P(X = s_i)$$

o ile $\sum_i |h(s_i) P(X = s_i)| < \infty$.

Przypomnienie

Niech $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją, a X będzie zmienną losową o rozkładzie dyskretnym, skupionym na zbiorze $\{s_1, s_2, \dots\}$.

Wówczas

$$\mathbb{E}h(X) = \sum_i h(s_i) P(X = s_i)$$

o ile $\sum_i |h(s_i) P(X = s_i)| < \infty$.

Nowe!

Niech $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją, a (X, Y) będzie wekt. los. o rozkładzie dyskretnym, skupionym na zb. $\{(s_1, t_1), (s_2, t_2), \dots\}$.

Wówczas

$$\mathbb{E}h(X, Y) = \sum_i h(s_i, t_i) P(X = s_i, Y = t_i)$$

o ile $\sum_i |h(s_i, t_i) P(X = s_i, Y = t_i)| < \infty$

Przykład 1

Bolek, Lolek i Tola wstąpili do kasyna.

Bolek postawił na „czerwone”
a Tola postawił na pierwsze 12;

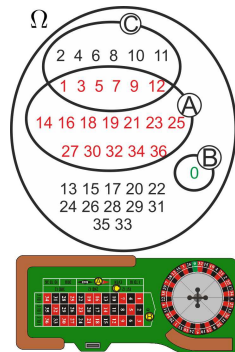
Jeśli Bolek wygra dostaje 1 żeton.

Tola za wygraną otrzymuje 2 żetony.

W przypadku przegranej tracą żeton.

X_A – wygrana Boleka oraz X_C – wygrana Toli.

Wyznacz $\mathbb{E}(X_A X_C)$.



$$\begin{aligned} \text{Rozkład: } \mathbb{P}(X_A = -1, X_C = -1) &= \frac{13}{37}, \mathbb{P}(X_A = -1, X_C = 2) = \frac{6}{37}, \\ \mathbb{P}(X_A = 1, X_C = -1) &= \frac{12}{37}, \mathbb{P}(X_A = 1, X_C = 2) = \frac{6}{37} \end{aligned}$$

Przypomnienie

Jeśli $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją mierzalną, a X jest zmienną losową o rozkładzie ciągłym z gęstością f , wówczas

$$\mathbb{E}h(X) = \int_{\mathbb{R}} h(x) f(x) dx$$

o ile $\int_{\mathbb{R}} |h(x) f(x)| dx < \infty$

Przypomnienie

Jeśli $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją mierzalną, a X jest zmienną losową o rozkładzie ciągłym z gęstością f , wówczas

$$\mathbb{E}h(X) = \int_{\mathbb{R}} h(x) f(x) dx$$

o ile $\int_{\mathbb{R}} |h(x) f(x)| dx < \infty$

Nowe!

Jeśli $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją mierzalną, a (X, Y) jest wektorem losowym o rozkładzie ciągłym z gęstością f , wówczas

$$\mathbb{E}h(X, Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} h(x, y) f(x, y) dx dy$$

o ile $\iint_{\mathbb{R}^2} |h(x, y) f(x, y)| dx dy < \infty$

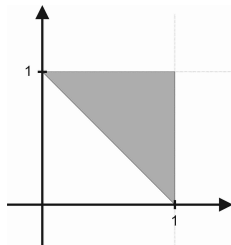
Przykład: rozkład jednostajny / prawdopodobieństwo geometryczne

Przykład 2

Wektor losowy (X, Y) ma rozkład jednostajny na trójkącie z ilustracji tzn. gęstość (X, Y) jest dana wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{dla } 0 \leq 1 - x \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{dla pozostałych } (x, y). \end{cases}$$

Wyznacz $\mathbb{E}(X \cdot Y)$.



wartość oczekiwana i niezależność

Przypomnienie

Dla **dowolnych** zmiennych losowych X_1, \dots, X_n , o skończonej wartości oczekiwanej

$$\mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbb{E}X_1 + \dots + \mathbb{E}X_n.$$

Ważne Twierdzenie!

Jeśli zmienne losowe X_1, X_2, \dots, X_n są **niezależne** o skończonej wartości oczekiwanej, to

$$\mathbb{E}X_1 \cdot \dots \cdot X_n = \mathbb{E}X_1 \cdot \dots \cdot \mathbb{E}X_n$$

Dowód dla $n = 2$ oraz X_1 i X_2 niezależnych zmiennych losowych ciągłych.

wartość oczekiwana i niezależność

Ważne Twierdzenie!

Jeśli z. l. X_1, X_2, \dots, X_n są **niezależne** o skończonej wart. ocz., to

$$\mathbb{E}X_1 \cdot \dots \cdot X_n = \mathbb{E}X_1 \cdot \dots \cdot \mathbb{E}X_n$$

Przykład 3

(X, Y) – rozkład jednostajny na kwadracie $[0, 1]^2$ tzn.

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leq x, y \leq 1, \\ 0 & \text{dla pozostałych } (x, y), \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

Wyznacz $\mathbb{E}(XY)$.

wariancja, przypomnienie

Przypomnienie

Wariancją zmiennej losowej X nazywamy

$$\text{Var}X = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)^2)$$

Przypomnienie

$$\text{Var}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$$

Definicja

Jeśli zmienne losowe X i Y mają wartości oczekiwane oraz $\mathbb{E} |XY| < \infty$, wówczas ich **kowariancja** jest zdefiniowana jako

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)]$$

Definicja

Jeśli zmienne losowe X i Y mają wartości oczekiwane oraz $\mathbb{E} |XY| < \infty$, wówczas ich **kowariancja** jest zdefiniowana jako

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)]$$

Fakt (prosty wzór na liczenie kowariancji)

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X \mathbb{E}Y$$

Dowód:...

Nierówność Schwarza

Jeśli $\mathbb{E}X^2 < \infty$, $\mathbb{E}Y^2 < \infty$, wówczas

$$(\mathbb{E}|XY|)^2 \leq \mathbb{E}X^2 \cdot \mathbb{E}Y^2$$

a równość zachodzi wtw $\frac{X}{(\mathbb{E}X^2)^{1/2}} = \pm \frac{Y}{(\mathbb{E}Y^2)^{1/2}}$

Dowód:

Nierówność Schwarza

Jeśli $\mathbb{E}X^2 < \infty$, $\mathbb{E}Y^2 < \infty$, wówczas

$$(\mathbb{E}|XY|)^2 \leq \mathbb{E}X^2 \cdot \mathbb{E}Y^2$$

a równość zachodzi wtw $\frac{X}{(\mathbb{E}X^2)^{1/2}} = \pm \frac{Y}{(\mathbb{E}Y^2)^{1/2}}$

Dowód:

Wniosek

$$|\text{cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\text{Var}X \cdot \text{Var}Y}$$

a równość zachodzi wtw X i Y są liniowo zależne (tzn.
 $X = aY + b$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$)

Dowód:

Wniosek

$$|\operatorname{cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\operatorname{Var} X \cdot \operatorname{Var} Y}$$

a równość zachodzi wtw X i Y są liniowo zależne (tzn. $X = aY + b$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$)

współczynnik korelacji zadany jest wzorem

$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{\operatorname{Var} X \cdot \operatorname{Var} Y}} = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Wniosek

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$$

oraz $|\rho(X, Y)| = 1$ wtw X i Y są liniowo zależne.

O czym „mówi” współczynnik korelacji?

Jeśli współczynnik korelacji $\rho(X, Y)$ bliski jest $+1$,
świadczy to o jakimś (bliskim liniowego) związku pomiędzy
zmiennymi losowymi
(duży X — duży Y ;
mały X — mały Y)

Jeśli współczynnik korelacji $\rho(X, Y)$ bliski jest -1 ,
świadczy to o jakimś związku (bliskim liniowego) pomiędzy
zmiennymi losowymi
(duży X — mały Y ;
mały X — duży Y)

Jeśli współczynnik korelacji $\rho(X, Y)$ bliski jest 0 ,
to hipotetyczny związek między zmiennymi losowymi
jest daleki od zależności liniowej

$$\rho = 0.95$$



$$\rho = 0.6$$



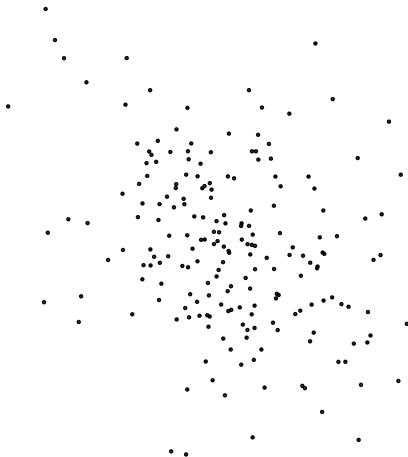
$$\rho = 0.3$$



$$\rho = 0$$



$$\rho = -0.3$$



$$\rho = -0.6$$



$$\rho = -0.95$$



$$\rho = 0.95$$



$$\rho = 0.95$$



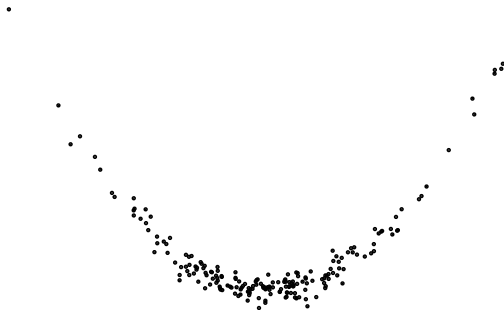
$$\rho = 0.95$$



$$\rho = 0.95$$



$$\rho = 0$$



Definicja

Jeśli $\text{cov}(X, Y) = 0$,
to zmienne losowe X i Y nazywamy **nieskorelowanymi**.

Definicja

Jeśli $\text{cov}(X, Y) = 0$,
to zmienne losowe X i Y nazywamy **nieskorelowanymi**.

Przypomnienie

Jeśli X i Y są niezależne o skończonych wartościach oczekiwanych,
to $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$.

Fakt

Jeśli X i Y są niezależne o skończonych wartościach oczekiwanych,
to są one nieskorelowane, czyli

$$\text{cov}(X, Y) = 0 \quad \text{oraz} \quad \rho(X, Y) = 0$$

Definicja

Jeśli $\text{cov}(X, Y) = 0$,
to zmienne losowe X i Y nazywamy **nieskorelowanymi**.

Przypomnienie

Jeśli X i Y są niezależne o skończonych wartościach oczekiwanych,
to $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$.

Fakt

Jeśli X i Y są niezależne o skończonych wartościach oczekiwanych,
to są one nieskorelowane, czyli

$$\text{cov}(X, Y) = 0 \quad \text{oraz} \quad \rho(X, Y) = 0$$

UWAGA!!!

$\text{cov}(X, Y) = 0 \not\Rightarrow X$ i Y niezależne.

Różnica między zmiennymi losowymi niezależnymi a nieskorelowanymi

X i Y niezależne (i mają kowariancję)

$\Rightarrow \text{cov}(X, Y) = 0$ (tzn. X i Y nieskorelowane i $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$)

$\text{cov}(X, Y) = 0$ (tzn. X i Y nieskorelowane i $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$)

$\nRightarrow X$ i Y niezależne

Przykład 7

Dla wektora losowego (X, Y) z rozkładem zadany tabelą pokaż, że
 $\text{cov}(X, Y) = 0$
ale X i Y są zależne.

$X \backslash Y$	-3	0
-2	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$
0	0	$\frac{3}{10}$
2	$\frac{1}{10}$	0

Przypomnienie

Dla dowolnych stałych $a, b \in \mathbb{R}$,
dowolnej z. l. X o skończonej wartości oczekiwanej i wariancji
i dowolnych z.l. X_1, X_2 o skończonej wartości oczekiwanej

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}X$$

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}X + b$$

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}X_2$$

1

$$\text{cov}(X, X) = \text{Var}X$$

2

$$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X),$$

3 kowariancja jest liniowa względem każdego ze swoich argumentów, czyli dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ oraz zmiennych losowych X_1, X_2, Y

$$\text{cov}(X_1 + X_2, Y) = \text{cov}(X_1, Y) + \text{cov}(X_2, Y)$$

$$\text{cov}(aX_1 + b, Y) = a \text{cov}(X_1, Y)$$

o ile odpowiednie kowariancje istnieją.

Dowód:

1

$$\text{cov}(X, X) = \text{Var}X$$

2

$$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X),$$

3 kowariancja jest liniowa względem każdego ze swoich argumentów, czyli dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ oraz zmiennych losowych X_1, X_2, Y

$$\text{cov}(X_1 + X_2, Y) = \text{cov}(X_1, Y) + \text{cov}(X_2, Y)$$

$$\text{cov}(aX_1 + b, Y) = a \text{cov}(X_1, Y)$$

o ile odpowiednie kowariancje istnieją.

Uwaga: z 1, 2 i 3 wynika też, że

$$\text{cov}(Y, X_1 + X_2) = \text{cov}(Y, X_1) + \text{cov}(Y, X_2)$$

$$\text{cov}(Y, aX_1 + b) = a \text{cov}(Y, X_1)$$

1

$$\text{cov}(X, X) = \text{Var}X$$

2

$$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X),$$

- 3** kowariancja jest liniowa względem każdego ze swoich argumentów, czyli dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ oraz zmiennych losowych X_1, X_2, Y

$$\text{cov}(X_1 + X_2, Y) = \text{cov}(X_1, Y) + \text{cov}(X_2, Y)$$

$$\text{cov}(aX_1 + b, Y) = a \text{cov}(X_1, Y)$$

o ile odpowiednie kowariancje istnieją.

Przykład 8

Wiemy, że

$\text{cov}(X_i, X_j) = 1, 1 \leq i < j \leq 3$ i $\text{Var}X_i = 2, 1 \leq i \leq 3$. Wyznacz $\text{cov}(2X_1 + 7X_2 + 5, 3X_1 - 2X_3 + 4) = ?$

Twierdzenie

Jeśli zmienne losowe X_1, \dots, X_n mają wariancję, to istnieje wariancja ich sumy i

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{1 \leq i \leq n} \text{Var} X_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j)$$

Dowód dla $n = 2$

Twierdzenie

Jeśli zmienne losowe X_1, \dots, X_n mają wariancję, to istnieje wariancja ich sumy i

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{1 \leq i \leq n} \text{Var} X_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j)$$

Dowód dla $n = 2$

Wniosek

Jeśli zmienne losowe X_1, \dots, X_n mają wariancję i są parami nieskorelowane (**np. są niezależne**), to

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{1 \leq i \leq n} \text{Var} X_i$$

Przypomnienie

Jeśli zmienne losowe X_1, \dots, X_n mają wariancję, to istnieje wariancja ich sumy i

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{1 \leq i \leq n} \text{Var} X_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j)$$

Przykład 9

Zmienna losowa X ma rozkład hipergeometryczny z parametrami n , m i N
oblicz $\text{Var} X$.

Przypomnienie

Jeśli zmienne losowe X_1, \dots, X_n mają wariancję i są parami nieskorelowane (**np. są niezależne**), to

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{1 \leq i \leq n} \text{Var}X_i$$

Przykład 10

Zmienna losowa X ma rozkład dwumianowy z parametrami n i p
oblicz $\text{Var}X$

Przypomnienie

Jeśli zmienne losowe X_1, \dots, X_n mają wariancję i są parami nieskorelowane (**np. są niezależne**), to

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{1 \leq i \leq n} \text{Var} X_i$$

Przykład 10

Zmienna losowa X ma rozkład dwumianowy z parametrami n i p
oblicz $\text{Var} X$

Przykład 11

Korzystając ze znajomości wariancji zmiennej losowej o rozkładzie geometrycznym z parametrem p (równa $(1-p)/p^2$), wyznaczyć wariancję zmiennej losowej o rozkładzie ujemnym dwumianowym z parametrami r i p .

Rozkłady łączne - krótkie podsumowanie

wektor losowy (X, Y)	o rozkładzie dyskretnym	o rozkładzie ciągłym
definicja	skupiony na przeliczalnej liczbie wartości (atomów) $A = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots\}$	istnieje funkcja f (gęstość) taka, że $\mathbb{P}((X, Y) \in B) = \iint_B f(x, y) dx dy$
opis rozkładu	podanie prawdopodobieństw atomów $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ dla $(x, y) \in A = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots\}$	podanie gęstości $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$
$\mathbb{P}(X \in B) =$	$\sum_{(x,y) \in B} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$	$\iint_B f(x, y) dx dy$
własności rozkładu	Jeśli A-zb. atomów $\sum_{(x,y) \in A} \mathbb{P}(X = x, Y = y) = 1$	$f(x, y) \geq 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2$ $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = 1$
$F(s, t) =$ dystrybuanta w punkcie $(s, t) \in \mathbb{R}^2$	$= \sum_{x_i \leq s} \sum_{y_j \leq t} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$	$\int_{-\infty}^t \left(\int_{-\infty}^s f(x, y) dx \right) dy$
rozkłady brzegowe	A – zbiór atomów $\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y: (x,y) \in A} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$ $\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x: (x,y) \in A} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$	$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy$ $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx$
niezależne gdy	\forall_i $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_i) = \mathbb{P}(X = x_i) \mathbb{P}(Y = y_i)$	$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ dla „prawie wszystkich” $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
$\mathbb{E}h(X, Y) =$	$\sum_i h(x_i, y_i) \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_i)$	$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) f(x, y) dx dy$