

ANALIZA DYNAMIKI ZJAWISK

1. **szereg czasowy**, chronologiczny (momentów, okresów)
2. **średni poziom zjawiska w czasie** (średnia arytmetyczna, średnia chronologiczna)
3. **miary dynamiki** (indeksy indywidualne, agregatowe)
4. **średnie tempo zmian** zjawiska w czasie
5. wygładzanie szeregu czasowego (mechaniczne, analityczne)
6. analiza wahań okresowych (wskaźniki sezonowości)

SZEREG CZASOWY

Szereg czasowy $\{y_t\}$ - uporządkowany ciąg wyników obserwacji zjawiska w czasie.

Szeregi czasowe dzielimy na szeregi:

1. okresów (poziomy zjawiska w całych okresach)
2. momentów (poziomy zjawiska w ustalonych momentach okresów)

PRZYKŁAD 1

<i>t</i> (okres lub moment)	<i>rok</i>	<i>Pojazdy</i> <i>stan na 31.XII</i> <i>[tys.]</i>	<i>Wypadki</i> <i>w roku</i>
1	1995	11186	56904
2	1996	11766	57911
3	1997	12284	66586
4	1998	12709	61855
5	1999	13169	55106
6	2000	14106	57331
7	2001	14724	53799
<i>razem</i>		×	

W przykładzie 1 mamy następujące szeregi:

„Wypadki” - szereg okresów (łączna liczba wypadków w każdym roku)

„Pojazdy” - szereg momentów (w każdym roku stan na 31.XII)

Średni poziom zjawiska w czasie

Średni poziom zjawiska w czasie liczymy odmiennie w zależności od rodzaju szeregu:

1. średnia arytmetyczna dla szeregu okresów

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_t$$

2. średnia chronologiczna dla szeregu momentów

$$\bar{y}_{ch} = \frac{1/2 y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + 1/2 y_n}{n - 1}$$

W przykładzie 1 mamy następujące średnie poziomy zjawisk:

„Wypadki” - szereg okresów (łączna liczba wypadków w każdym roku)

$$\bar{y} = \frac{56904 + 57911 + \dots + 57331 + 53799}{7} = 58499$$

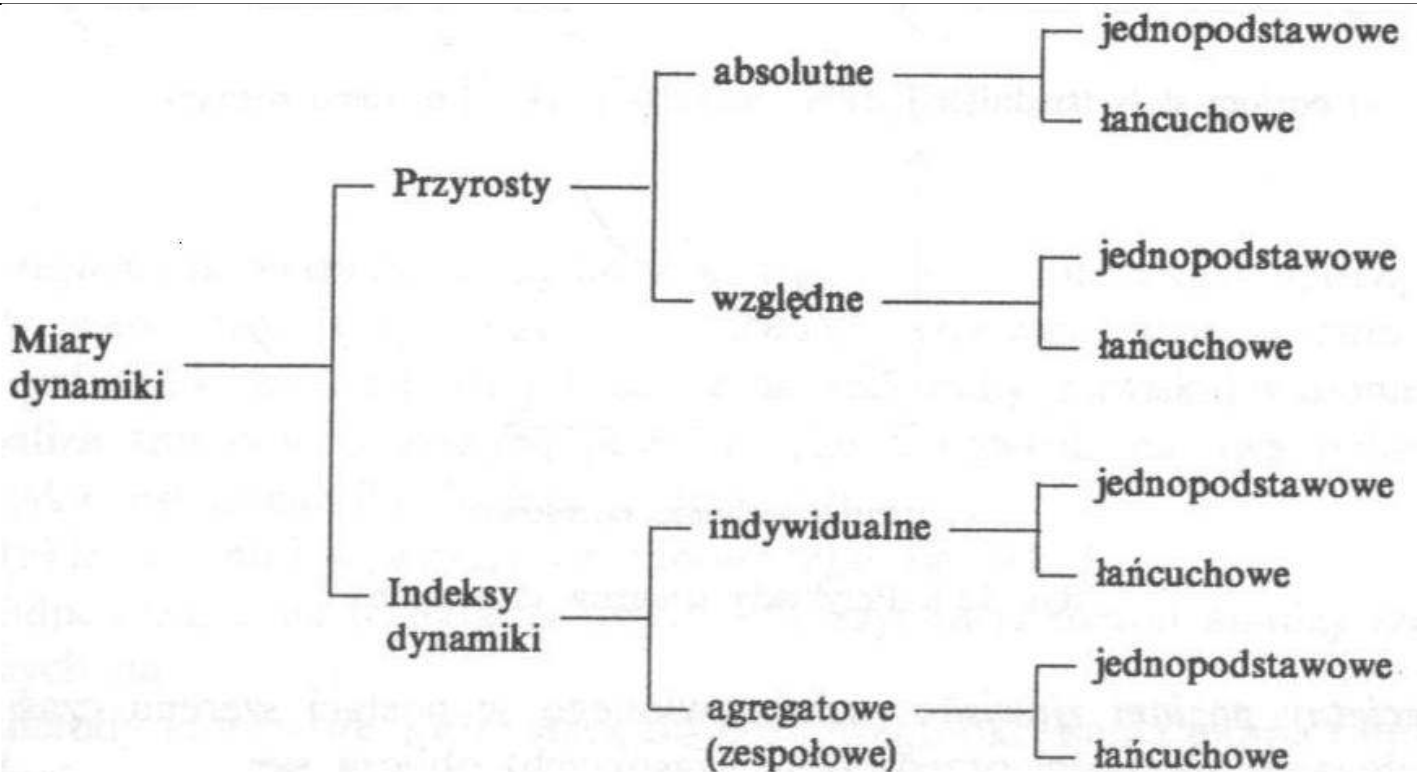
W latach 1995-2001 średnia roczna liczba wypadków drogowych wyniosła 58499 wypadków.

„Pojazdy” - szereg momentów (w każdym roku stan na 31.XII)

$$\bar{y}_{ch} = \frac{\frac{1}{2} 11186 + 11766 + \dots + 14106 + \frac{1}{2} 14724}{7 - 1} = 12832$$

W latach 1995-2001 średnio w roku zarejestrowanych było 12832 tys. pojazdów samochodowych.

MIARY DYNAMIKI



Miary dynamiki o podstawie stałej (JEDNOPODSTAWOWE)

Określają one zmiany jakie następowały w kolejnych okresach (momentach) t w odniesieniu do okresu (momentu) podstawowego (bazowego) t^* .

Ogólnie okresem (momentem) bazowym może być dowolny okres (moment) k , tj. $t^*=k$.

Dalej (dla wygody) przyjmiemy, że okresem bazowym będzie pierwszy okres, okres, tj. $t^*=1$.

Miary dynamiki o podstawie ruchomej (ŁAŃCUCHOWE)

Określają one zmiany jakie następowały w kolejnych okresach (momentach) t w odniesieniu do okresu (momentu) bezpośrednio poprzedzającego)

tj. $t^*=t-1$.

Przyrosty ABSOLUTNE

Określają one o ile wzrósł (zmalął) poziom zjawiska w okresie badanym (t) w porównaniu z jego poziomem w okresie przyjętym za podstawę porównania (t^*).

Przyrosty absolutne są mianowane tak samo jak badana cecha.

- jednopodstawowe ($t^*=1$) $\Delta_{t/1} = y_t - y_1$
- łańcuchowe ($t^*=t-1$) $\Delta_{t/t-1} = y_t - y_{t-1}$

PRZYKŁAD 2

t	<i>Wypadki</i>	przyrosty absolutne	
		jednopodstawowe	łańcuchowe
1	56904		
2	57911		
3	66586		
4	61855	4951	-4731
5	55106	-1798	-6749
6	57331	427	2225
7	53799	-3105	-3532

Przykładowo dla okresu $t=5$ mamy:

- Przyrost absolutny jednopodstawowy

$$\Delta_{5/1} = y_5 - y_1 = 55106 - 56904 = -1798$$

- Przyrost absolutny łańcuchowy

$$\Delta_{5/4} = y_5 - y_4 = 55106 - 61855 = -6749$$

Przyrost absolutny informuje o ile jednostek wzrósł (znak *plus*) lub zmalał (znak *minus*) poziom badanego zjawiska w okresie t w stosunku do poziomu z okresu t^* będącego podstawą porównania.

Przyrosty WZGLĘDNE (wskaźniki tempa zmian)

Określają one stosunek przyrostu absolutnego w okresie badanym (t) do jego poziomu w okresie przyjętym za podstawę porównania (t^*).

Przyrosty względne są wielkościami niemianowanymi.

Wyrażamy je zawsze w ułamkach ale interpretujemy w procentach.

- jednopodstawowe ($t^*=1$)

$$d_{t/1} = \frac{\Delta_{t/1}}{y_1} = \frac{y_t - y_1}{y_1}$$

- łańcuchowe ($t^*=t-1$)

$$d_{t/t-1} = \frac{\Delta_{t/t-1}}{y_{t-1}} = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}}$$

PRZYKŁAD 3

t	<i>Wypadki</i>	przyrosty względne	
		jednopodstawowe	łańcuchowe
1	56904		
2	57911		
3	66586		
4	61855	0,087	-0,071
5	55106	-0,032	-0,109
6	57331	0,008	0,040
7	53799	-0,055	-0,062

Przykładowo dla okresu $t=5$ mamy przyrost względny:

- jednopodstawowy $d_{5/1} = \frac{\Delta_{5/1}}{y_1} = \frac{-1798}{56904} = -0,032$

- łańcuchowy $d_{5/4} = \frac{\Delta_{5/4}}{y_4} = \frac{-6749}{61855} = -0,109$

Do interpretacji należy zawsze pomnożyć wynik przez 100% (w pamięci).

Przyrost względny (wskaźnik tempa zmian) informuje o ile % wzrósł (znak *plus*) lub zmalał (znak *minus*) poziom badanego zjawiska w okresie t

w stosunku do poziomu z okresu t^* będącego podstawą porównania.

Indywidualne INDEKSY DYNAMIKI

Określają one stosunek poziomu zjawiska w okresie badanym (t) do jego poziomu w okresie przyjętym za podstawę porównania (t^*).

Indeksy dynamiki są wielkościami niemianowanymi.

Wyrażamy je zawsze w ułamkach ale interpretujemy w procentach.

- jednopodstawowe ($t^*=1$)

$$i_{t/1} = \frac{y_t}{y_1} = 1 + d_{t/1}$$

- łańcuchowe ($t^*=t-1$)

$$i_{t/t-1} = \frac{y_t}{y_{t-1}} = 1 + d_{t/t-1}$$

PRZYKŁAD 3

t	<i>Wypadki</i>	indeksy indywidualne	
		jednopodstawowe	łańcuchowe
1	56904		
2	57911		
3	66586		
4	61855	1,087	0,929
5	55106	0,968	0,891
6	57331	1,008	1,040
7	53799	0,945	0,938

Przykładowo dla okresu $t=5$ mamy indywidualny indeks dynamiki:

- jednopodstawowy $i_{5/1} = \frac{y_5}{y_1} = \frac{55106}{56904} = 0,968$

- łańcuchowy $i_{5/4} = \frac{y_5}{y_4} = \frac{55106}{61855} = 0,891$

Do interpretacji należy zawsze odjąć od indeksu jeden i pomnożyć wynik przez 100% (w pamięci). Otrzymamy w ten sposób przyrost względny w %.

Tak „spreparowany” indeks dynamiki informuje o ile %

wzrósł (znak *plus*) lub zmalał (znak *minus*)

poziom badanego zjawiska w okresie t

w stosunku do poziomu z okresu t^* będącego podstawą porównania.

ŚREDNIE TEMPO ZMIAN zjawiska w czasie

Średnie tempo zmian zjawiska w czasie wyznacza się jako średnią geometryczną z indeksów łańcuchowych:

$$\bar{i}_G = \sqrt[n]{i_{n/n-1} \times i_{n-1/n-2} \times \cdots \times i_{3/2} \times i_{2/1}}$$

Jeżeli w liczeniu indeksów jednopodstawowych przyjmiemy okres pierwszy jako bazowy ($i^*=1$), to wzór ten upraszcza się do:

$$\bar{i}_G = \sqrt[n]{i_{n/1}}$$

Dla szeregu „Wypadki” średnie tempo zmian liczby wypadków wynosi:

$$\bar{i}_G = \sqrt[7]{i_{7/1}} = \sqrt[7]{0,945} = 0,9906$$

Średniookresowe tempo zmian zjawiska w czasie wyznacza się jako:

$$\bar{T}_n = \bar{i}_G - 1$$

Do interpretacji należy zawsze pomnożyć wynik przez 100% (w pamięci).

W ciągu badanych n okresów poziom badanego zjawiska rósł (znak *plus*) lub malął (znak *minus*) średnio z okresu na okres o wyliczoną wartość (%).

Dla szeregu „Wypadki” średniookresowe tempo zmian liczby wypadków wynosi:

$$\bar{T}_n = \bar{i}_G - 1 = 0,9906 - 1 = -0,0094$$

Interpretacja:

W ciągu 7 kolejnych lat (1995-2001) liczba wypadków drogowych w Polsce maląła (znak *minus*) średnio z roku na rok o 0,94% (maląła średnio o 0,94% w stosunku do roku poprzedniego).

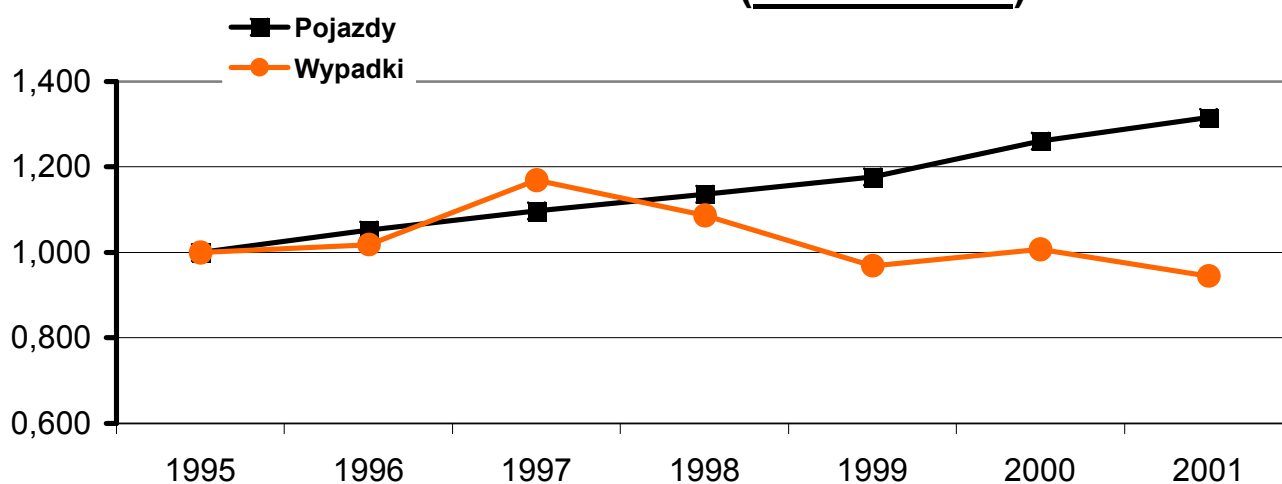
Analiza dynamiki zjawisk na WYKRESACH

Dynamika zjawiska (zjawisk) może być wizualizowana za pomocą wykresów. W celu uniknięcia pomyłek zwracaj szczególną uwagę na dopiski w tytule.

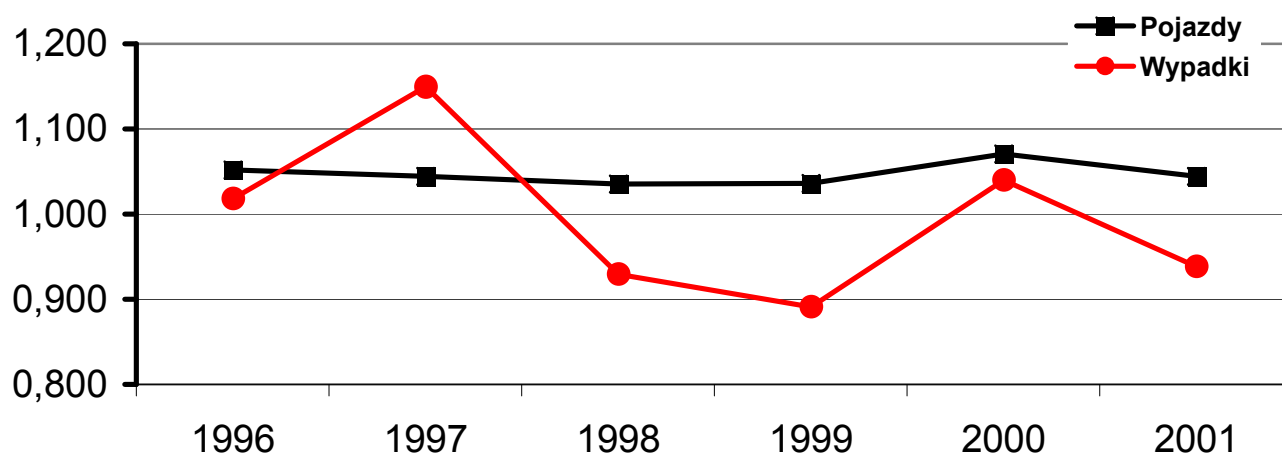
Jeżeli dopisek brzmi:

- rok, miesiąc, itp. poprzedni = 1 (lub ... = 100), to oglądasz wykres dynamiki opisaney indeksami łańcuchowymi;
- rok xxxx = 1, miesiąc xx = 1, itp. (lub ... = 100), to oglądasz wykres dynamiki opisaney indeksami o stałej podstawie, którą jest okres podany w dopisku.

**Dynamika liczby pojazdów i wypadków w Polsce
w latach 1995-2001 (rok 1995 = 1)**



**Dynamika liczby pojazdów i wypadków w Polsce
w latach 1995-2001 (rok poprzedni = 1)**



PRZELICZANIE INDEKSÓW

1. jednopodstawowe ($t^*=1$) na łańcuchowe
2. łańcuchowe na jednopodstawowe ($t^*=1$)
3. łańcuchowe na jednopodstawowe ($t^*>1$; np. $t^*=4$)

t	DANE Wypadki ($i_{t/1}$) (jedenpod.: $t^*=1$)	SZUKANE łańcuchowe ($t^*=t-1$)	<i>przeliczenie</i>
1	1,000	-	nie istnieje (def.)
2	1,018		1,018 / 1,000
3	1,170		1,170 / 1,018
4	1,087		1,087 / 1,170
5	0,968		0,968 / 1,087
6	1,008		1,008 / 0,968
7	0,945		0,945 / 1,008

t	DANE Wypadki ($i_{t/t-1}$) (łańcuch.: $t^*=t-1$)	SZUKANE jedenpod. ($t^*=1$)	<i>przeliczenie</i>
1	-	1,000	z definicji
2	1,018		1,018
3	1,150		1,150*1,018
4	0,929		0,929*1,150*1,018
5	0,891		0,891*0,929*1,150*1,018
6	1,040		1,040*0,891*0,929*1,150*1,018
7	0,938		0,938*1,040*0,891*0,929*1,150*1,018

t	DANE Wypadki ($i_{t/t-1}$) (łańcuch.: $t^*=t-1$)	SZUKANE jedenpod. ($t^*=4$)	<i>przeliczenie</i>
1	-		1 / (0,929*1,150*1,018)
2	1,018		1 / (0,929*1,150)
3	1,150		1 / 0,929
4	0,929	1,000	z definicji
5	0,891		0,891
6	1,040		1,040*0,891
7	0,938		0,938*1,040*0,891

Do domu:

1. Dla szeregu „Pojazdy” policzyć i zinterpretować miary dynamiki jednopodstawowe ($t^*=1$) oraz łańcuchowe:
przyrosty absolutne,
przyrosty względne,
indeksy dynamiki,
średnioroczne tempo zmian oraz
przeliczyć indeksy łańcuchowe na jednopodstawowe ($t^*=4$).
2. Wyznaczyć nowy szereg czasowy „Wypadkowość” (liczba wypadków na 1000 pojazdów) i wykonać dla niego polecenie 1.
3. Sporządzić wykresy dynamiki wypadkowości (łańcuchowo i jednopodstawowo ($t^*=1$)).

INDEKSY WARTOŚCI, CEN, ILOŚCI

Indeksy INDYWIDUALNE

PRZYKŁAD 4

„Jan Kowalski” uruchomił w miesiącu wrześniu własną działalność i zajął się sprzedażą środków czystości.

We wrześniu i w październiku handlował proszkiem. W tabeli przedstawiono podstawowe dane z jego działalności.

- 0 jest numerem września
- 1 jest numerem października
- q oznacza ilość
- p oznacza cenę
- w oznacza wartość

wyrób	wrzesień		październik		wrzes.	paźdz.
	ilość	cena	ilość	cena	wartość	
	q_0	p_0	q_1	p_1	$q_0 * p_0$	$q_1 * p_1$
proszek	200	5	300	6		

Wartość sprzedanego towaru w okresie t policzymy jako iloczyn ilości i ceny.

Indeks wartości (I_w) sprzedanego towaru policzymy jako stosunek wartości sprzedaży w październiku do wartości sprzedaży we wrześniu.

$$I_w = \frac{q_1 p_1}{q_0 p_0} = \frac{1800}{1000} = 1,800$$

Wartość sprzedanego towaru w październiku wzrosła w stosunku do września o 80%.

Indeks ilości (I_q) sprzedanego towaru policzymy jako stosunek ilości sprzedanej w październiku do ilości sprzedanej we wrześniu.

$$I_q = \frac{q_1}{q_0} = \frac{300}{200} = 1,500$$

Ilość sprzedanego towaru w październiku wzrosła w stosunku do wrześniowej o 50%.

Indeks ceny (I_p) sprzedanego towaru policzymy jako stosunek ceny sprzedaży w październiku do ceny sprzedaży we wrześniu.

$$I_p = \frac{p_1}{p_0} = \frac{6}{5} = 1,200$$

Cena sprzedanego towaru w październiku wzrosła w stosunku do wrześniowej o 20%.

Równość indeksowa (zasada) mówi:

jeżeli wartość powstaje jako iloczyn ilość razy cena,
to indeks wartości można wyrazić również jako
iloczyn indeksu ilości razy indeks ceny.

$$I_w = I_q \times I_p = 1,500 \times 1,200 = 1,800$$

Powyższa zasada ma uniwersalne znaczenie.

**”Jeżeli zjawisko Z powstaje jako iloczyn zjawisk X i Y,
to dynamikę zjawiska Z możemy wyrazić indeksem,
który jest iloczynem indeksu dla zjawiska X oraz indeksu dla zjawiska Y.”**

Indeksy AGREGATOWE (wielkości absolutnych)

PRZYKŁAD 5

„Jan Kowalski” rozszerzył w listopadzie swoją działalność.

W listopadzie i w grudniu handlował już pięcioma produktami. W tabeli przedstawiono podstawowe dane z jego działalności.

0 jest numerem listopada

1 jest numerem grudnia

Reszta oznaczeń pozostaje bez zmian.

Dla uproszczenia pomijamy numerowanie wyrobów.

	listopad		grudzień		wartość			
	q_0	p_0	q_1	p_1	$q_0 \cdot p_0$	$q_1 \cdot p_1$	$q_0 \cdot p_1$	$q_1 \cdot p_0$
proszek	350	6	450	4				
mydło	600	3	650	2				
pasta	1200	3	1500	4	3600	6000	4800	4500
szampon	500	4	600	3	2000	1800	1500	2400
płyn	300	4	250	3	1200	750	900	1000
razem	×	×	×	×				

Indeks wartości (I_w) sprzedanego towaru policzymy jako stosunek wartości sprzedaży w grudniu do wartości sprzedaży w listopadzie.

$$I_w = \frac{\sum_{\text{wyroby}} q_1 p_1}{\sum_{\text{wyroby}} q_0 p_0} = \frac{11650}{10700} = 1,089$$

Wartość sprzedanego towaru w grudniu wzrosła w stosunku do listopada o 8,9% .

Pamiętaj o zasadzie interpretacji indeksu: $[1,089-1] \times 100\% = +8,9\%$!!!

W obu okresach sprzedawane były różne ilości towarów i po różnych cenach.

Z wyznaczeniem dynamiki ilości oraz dynamiki cen jest teraz problem, którego precyzyjnie nie można rozwiązać.

W obu przypadkach musimy posłużyć się indeksami wartości, które przybliżą nam nieznaną dynamikę ilości albo dynamikę cen.

1. Jeżeli badamy **dynamikę ilości**, to przyjmujemy stałe ceny z okresu:
 - bazowego (**indeks ilości Laspeyresa**) albo
 - bieżącego (indeks ilości Paaschego).
2. Jeżeli badamy **dynamikę cen**, to przyjmujemy stałe ilości z okresu:
 - bazowego (indeks cen Laspeyresa) albo
 - bieżącego (**indeks cen Paaschego**).

Indeksy ilości

$${}_L I_q = \frac{\sum_{\text{wyroby}} q_1 p_0}{\sum_{\text{wyroby}} q_0 p_0}$$

indeks ilości Laspeyresa

$${}_P I_q = \frac{\sum_{\text{wyroby}} q_1 p_1}{\sum_{\text{wyroby}} q_0 p_1}$$

indeks ilości Paaschego

Indeksy cen

$${}_L I_p = \frac{\sum_{\text{wyroby}} q_0 p_1}{\sum_{\text{wyroby}} q_0 p_0}$$

indeks cen Laspeyresa

$${}_P I_p = \frac{\sum_{\text{wyroby}} q_1 p_1}{\sum_{\text{wyroby}} q_1 p_0}$$

indeks cen Paaschego

W przykładzie mamy:

Indeksy ilości

$${}_L I_q = \frac{12550}{10700} = 1,173$$

indeks ilości Laspeyresa

$${}_P I_q = \frac{11650}{9800} = 1,189$$

indeks ilości Paaschego

W grudniu ilość sprzedanych towarów wzrosła pomiędzy 17,3% a 18,9% w porównaniu z listopadem.

Indeksy cen

$${}_L I_p = \frac{9800}{10700} = 0,916$$

indeks cen Laspeyresa

$${}_P I_p = \frac{11650}{12550} = 0,928$$

indeks cen Paaschego

W grudniu ceny sprzedanych towarów spadły pomiędzy 7,2% a 8,4% w porównaniu z listopadem.

Równości indeksowe.

$$I_w = {}_L I_q \times {}_P I_p = 1,173 \times 0,928 = 1,089$$

$$I_w = {}_P I_q \times {}_L I_p = 1,189 \times 0,916 = 1,089$$