

PIERŚCIENIE I CIAŁA

Zadania, zestaw 3

Zadanie 1. Ile jest liczb naturalnych względnie pierwszych z 3255 i mniejszych od tej liczby?

Zadanie 2. Znaleźć $m, n \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\varphi(5^m 7^n) = 840.$$

Zadanie 3. Sprawdzić, że zbiór \mathbb{R} z działaniami

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$$

jest pierścieniem. Wyznaczyć dzielniki zera tego pierścienia.

Zadanie 4. Sprawdzić, że zbiór wszystkich macierzy postaci

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix}$$

gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, ze zwykłymi działaniami jest pierścieniem. Wyznaczyć dzielniki zera tego pierścienia.

Zadanie 5. Wyznaczyć dzielniki zera pierścienia \mathbb{Z}_8 .

Zadanie 6. Wyznaczyć elementy odwracalne pierścienia $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Zadanie 7. Niech $\mathbb{R}[x]$ będzie pierścieniem wielomianów o współczynnikach rzeczywistych. Sprawdzić, czy zbiór

$$A = \{f \in \mathbb{R}[x] : f'(x) = 0\}$$

jest podpierścieniem pierścienia $\mathbb{R}[x]$ i czy jest ideałem.