PIERŚCIENIE I CIAŁA
Wykład 5

Kwaterniony

Konstrukcja kwaternionów jest analogiczna do konstrukcji liczb zespolonych. Kwaterniony definiujemy jako uporządkowane czwórki liczb rzeczywistych (p_0, p_1, p_2, p_3). Zbiór wszystkich takich czwórek oznaczamy przez $\mathbb{H}$. Czwórkę postaci $(a, 0, 0, 0)$ utożsamiamy z liczbą a. Oznaczając $\mathbf{i} = (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 0, 1)$ otrzymujemy zapis

$$(p_0, p_1, p_2, p_3) = p_0 + p_1\,\mathbf{i} + p_2\,\mathbf{j} + p_3\,\mathbf{k}.$$

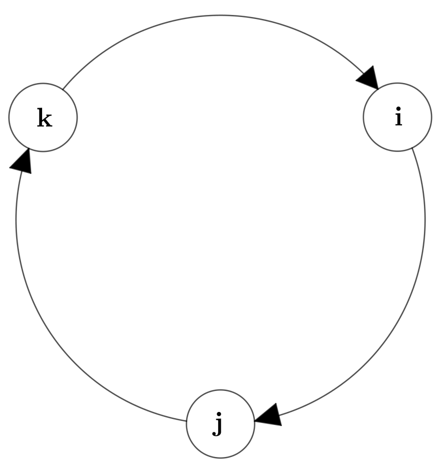
Dodawanie kwaternionów $p = p_0 + p_1\,\mathbf{i} + p_2\,\mathbf{j} + p_3\,\mathbf{k}$, $q = q_0 + q_1\,\mathbf{i} + q_2\,\mathbf{j} + q_3\,\mathbf{k}$ definiujemy wzorem

$$p + q = p_0 + q_0 + (p_1 + q_1)\mathbf{i} + (p_2 + q_2)\mathbf{j} + (p_3 + q_3)\mathbf{k}.$$

Mnożenie jednostek $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ definiujemy wzorami

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \quad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}.$$

Do zobrazowania tych wzorów stosujemy następujący diagram.



Rysunek 1. Mnożenie kwaternionów

Stosując te wzory i zwykłe reguły działań możemy wykonywać mnożenie dowolnych kwaternionów:

$$\begin{aligned} pq &= (p_0 + p_1\,\mathbf{i} + p_2\,\mathbf{j} + p_3\,\mathbf{k})(q_0 + q_1\,\mathbf{i} + q_2\,\mathbf{j} + q_3\,\mathbf{k}) = \\ &= p_0q_0 - (p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3) + p_0(q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) + q_0(p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}) + \\ &\quad + (p_2q_3 - p_3q_2)\mathbf{i} + (p_3q_1 - p_1q_3)\mathbf{j} + (p_1q_2 - p_2q_1)\mathbf{k}. \end{aligned} \tag{1}$$

Przykład 1.

$$(1 + \mathbf{i})(2 + \mathbf{k}) = 2 + \mathbf{k} + \mathbf{i} \cdot 2 + \mathbf{ik} = 2 + \mathbf{k} + 2\mathbf{i} + (-\mathbf{j}) = 2 + 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Zbiór $\mathbb{H}$ z tak zdefiniowanymi działaniami jest pierścieniem. Zerem tego pierścienia jest liczba 0, zaś jedynką liczba 1. Pierścień $\mathbb{H}$ nie jest przemienny, gdyż np.

$$\mathbf{ik} = -\mathbf{j} \neq \mathbf{j} = \mathbf{ki}.$$

Utożsamiając kwaterniony postaci $a + b\mathbf{i}$ z liczbami zespolonymi $a + bi$ uważamy $\mathbb{C}$ za podpierścień pierścienia $\mathbb{H}$. W szczególności $\mathbb{R}$ uważamy za podpierścień pierścienia $\mathbb{H}$. Ogólnie mnożenie kwaternionów nie jest przemienne, ale w przypadku, gdy $s \in \mathbb{R}$, dla dowolnego kwaternionu $q = q_0 + q_1\,\mathbf{i} + q_2\,\mathbf{j} + q_3\,\mathbf{k}$ mamy przemienność mnożenia

$$sq = sq_0 + sq_1\,\mathbf{i} + sq_2\,\mathbf{j} + sq_3\,\mathbf{k} = qs.$$

Wzór (1) można zapisać w prostszej postaci używając iloczynu skalarnego i iloczynu wektorowego. W tym celu w kwaternionie $q = q_0 + q_1\,\mathbf{i} + q_2\,\mathbf{j} + q_3\,\mathbf{k}$ wyróżniamy część rzeczywistą $Rq = q_0$ i część wektorową $Vq = q_1\,\mathbf{i} + q_2\,\mathbf{j} + q_3\,\mathbf{k}$, którą utożsamiamy z wektorem $(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$. Zatem $q = Rq + Vq$.

Wzór (1) możemy teraz zapisać jako

$$pq = RpRq - Vp \cdot Vq + RpVq + RqVp + Vp \times Vq, \tag{2}$$

gdzie

$$Vp \cdot Vq = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3$$

jest euklidesowym iloczynem skalarnym wektorów Vp, Vq, zaś

$$Vp \times Vq = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i}, & \mathbf{j}, & \mathbf{k} \\ p_1, & p_2, & p_3 \\ q_1, & q_2, & q_3 \end{bmatrix}$$

jest iloczynem wektorowym tych wektorów.

Przykład 2. Niech $p = 3 + \mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $q = 2 - \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$. Wtedy $Vp = (1, -2, 1)$, $Vq = (-1, 2, 3)$, więc $Vp \cdot Vq = -2$ oraz

$$\begin{aligned} Vp \times Vq = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i}, & \mathbf{j}, & \mathbf{k} \\ 1, & -2, & 1 \\ -1, & 2, & 3 \end{bmatrix} &= \\ = \mathbf{i} \det \begin{bmatrix} -2, & 1 \\ 2, & 3 \end{bmatrix} - \mathbf{j} \det \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ -1, & 3 \end{bmatrix} + \mathbf{k} \det \begin{bmatrix} 1, & -2 \\ -1, & 2 \end{bmatrix} &= \\ = -8\mathbf{i} - 4\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Stąd

$$pq = 6 - (-2) + 3(-\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}) + 2(\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + \mathbf{k}) + (-8\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) = 8 - 9\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + 11\mathbf{k}.$$

Załóżmy, że $Rp = 0 = Rq$, czyli $p = Vp$, $q = Vq$. Wtedy wzór (2) przyjmuje postać

$$pq = -Vp \cdot Vq + Vp \times Vq = -p \cdot q + p \times q. \tag{3}$$

Ponieważ dla dowolnych wektorów $v, w \in \mathbb{R}^3$ mamy

$$v \cdot w = w \cdot v, \quad v \times w = -w \times v, \tag{4}$$

więc ze wzoru (2) wynika, że jeśli $Rp = 0 = Rq$, to

$$pq - qp = -p \cdot q + p \times q + q \cdot p - q \times p = 2p \times q \tag{5}$$

oraz

$$(6) \qquad pq + qp = -p \cdot q + p \times q - q \cdot p + q \times p = -2p \cdot q.$$

Analogicznie jak dla liczb zespolonych kwaternion sprzężony do $q = q_0 + q_1\,\mathbf{i} + q_2\,\mathbf{j} + q_3\,\mathbf{k}$ definiujemy wzorem

$$q^* = q_0 - q_1\,\mathbf{i} - q_2\,\mathbf{j} - q_3\,\mathbf{k},$$

co można też zapisać jako

$$q^* = Rq - Vq.$$

Mamy

$$(p+q)^* = R(p+q) - V(p+q) = Rp + Rq - Vp - Vq = p^* + q^*$$

i analogiczny wzór zachodzi dla większej liczby składników. Korzystając z tego wzoru, wzoru (2) oraz własności iloczynu skalarnego i iloczynu wektorowego dostajemy

$$\begin{aligned}(pq)^* &= (RpRq - Vp \cdot Vq + RpVq + RqVp + Vp \times Vq)^* = \\ &= RpRq - Vp \cdot Vq - RpVq - RqVp - Vp \times Vq = \\ &= RpRq - (-Vp) \cdot (-Vq) + Rp(-Vq) + Rq(-Vp) + (-Vq) \times (-Vp).\end{aligned}$$

Porównując ostatnie wyrażenie ze wzorem (2) widzimy, że

$$(pq)^* = (Rq - Vq)(Rp - Vp) = q^*p^*.$$

Inny model pierścienia kwaternionów otrzymujemy używając macierzy postaci

$$\begin{bmatrix} z, & w \\ -\overline{w}, & \overline{z} \end{bmatrix},$$

gdzie $z, w \in \mathbb{C}$. Oznaczmy zbiór wszystkich takich macierzy przez S. Wzór

$$F(q) = \begin{bmatrix} q_0 + q_1 i, & q_2 + q_3 i \\ -q_2 + q_3 i, & q_0 - q_1 i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z, & w \\ -\overline{w}, & \overline{z} \end{bmatrix},$$

gdzie $q = q_0 + q_1\,\mathbf{i} + q_2\,\mathbf{j} + q_3\,\mathbf{k}$, $z = q_0 + q_1 i$, $w = q_2 + q_3 i$, definiuje izomorfizm pierścienia $\mathbb{H}$ na pierścień macierzy S. Wynika to z faktu, że

$$F(q) = q_0\mathbf{U} + q_1\mathbf{I} + q_2\mathbf{J} + q_3\mathbf{K},$$

gdzie

$$\mathbf{U} = I_2 = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} i, & 0 \\ 0, & -i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0, & i \\ i, & 0 \end{bmatrix}$$

mają własności analogiczne do jednostek $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, czyli

$$\mathbf{I}^2 = \mathbf{J}^2 = \mathbf{K}^2 = -\mathbf{U}, \quad \mathbf{IJ} = -\mathbf{JI} = \mathbf{K}, \quad \mathbf{JK} = -\mathbf{KJ} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{KI} = -\mathbf{IK} = \mathbf{J}.$$

Zauważmy ponadto, że

$$\det F(q) = (q_0 + q_1 i)(q_0 - q_1 i) + (q_2 + q_3 i)(q_2 - q_3 i) = |q_0 + q_1 i|^2 + |q_2 + q_3 i|^2 = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$$

i modułem kwaternionu q nazywamy liczbę

$$|q| = \sqrt{\det F(q)} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}.$$

Ponieważ $|Vq|^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$, więc wzór ten można też krótko zapisać jako

$$|q| = \sqrt{(Rq)^2 + |Vq|^2}.$$

Dla dowolnych $p, q \in \mathbb{H}$ mamy

$$|pq| = \sqrt{\det F(pq)} = \sqrt{\det(F(p)F(q))} = \sqrt{\det F(p) \det F(q)} =$$
$$= \sqrt{\det F(p)}\sqrt{\det F(q)} = |p|\,|q|.$$

Oznaczając $z = q_0 + q_1 i$, $w = q_2 + q_3 i$ mamy $|q|^2 = |z|^2 + |w|^2$ oraz

$$F(q) = \begin{bmatrix} q_0 + q_1 i, & q_2 + q_3 i \\ -q_2 + q_3 i, & q_0 - q_1 i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z, & w \\ -\overline{w}, & \overline{z} \end{bmatrix},$$

$$F(q^*) = \begin{bmatrix} q_0 - q_1 i, & -q_2 - q_3 i \\ q_2 - q_3 i, & q_0 + q_1 i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{z}, & -w \\ \overline{w}, & z \end{bmatrix},$$

więc

$$F(qq^*) = F(q)F(q^*) = \begin{bmatrix} z\overline{z} + w\overline{w}, & -zw + wz \\ -\overline{w}\,\overline{z} + \overline{z}\,\overline{w}, & w\overline{w} + z\overline{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |z|^2 + |w|^2, & 0 \\ 0, & |z|^2 + |w|^2 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} |q|^2, & 0 \\ 0, & |q|^2 \end{bmatrix} = F\left(|q|^2\right).$$

Stąd $qq^* = |q|^2$ i podobnie $q^*q = |q|^2$. Zatem jeśli $q \neq 0$, to

$$q\left(\frac{1}{|q|^2}q^*\right) = \left(\frac{1}{|q|^2}q^*\right)q = 1,$$

co oznacza, że $\frac{1}{|q|^2}q^*$ jest elementem odwrotnym do q. Zatem każdy niezerowy kwaternion q ma element odwrotny w pierścieniu $\mathbb{H}$, co w szczególności pokazuje, że w $\mathbb{H}$ nie ma niezerowych dzielników zera.

Kwaterniony i obroty w przestrzeni trójwymiarowej

Dzięki liczbom zespolonym możemy w zwięzły sposób zapisać wzór na obrót na płaszczyźnie. Dla punktu $z \in \mathbb{C}$ jego obraz przy obrocie wokół punktu 0 o kąt $\alpha > 0$ przeciwnie do ruchu wskazówek zegara wyraża się wzorem

$$O_\alpha z = e^{i\alpha}z = (\cos\alpha + i\sin\alpha)z.$$

Przechodząc do zapisu $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$ otrzymujemy wzór

$$O_\alpha z = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(x + iy) = x\cos\alpha - y\sin\alpha + i(x\sin\alpha + y\cos\alpha)$$

lub w zapisie wektorowym

$$O_\alpha z = (x\cos\alpha - y\sin\alpha, x\sin\alpha + y\cos\alpha).$$

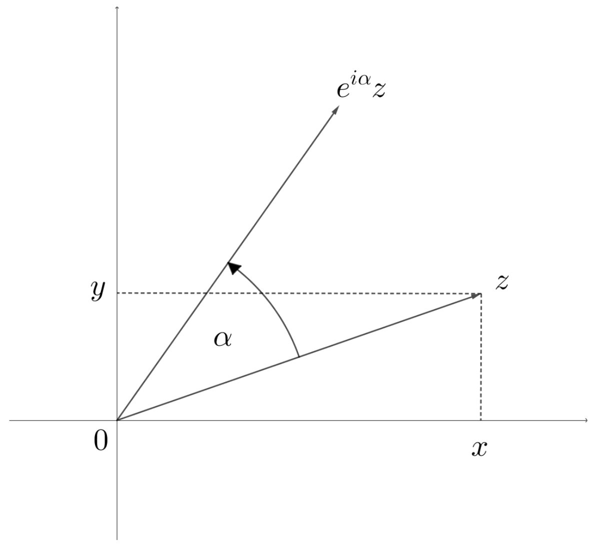
Wzór ten obowiązuje przy tradycyjnej orientacji osi układu współrzędnych.

Wzór ten możemy też zapisać w postaci macierzowej:

$$O_\alpha z = \begin{bmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

a więc takiemu obrotowi odpowiada macierz

$$O_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$



Rysunek 2. Obrót na płaszczyźnie

Aby jednoznacznie określić obrót na płaszczyźnie wystarczy zadeklarować, czy jest on zgodny, czy przeciwny do ruchu wskazówek zegara. W przestrzeni trójwymiarowej każdy obrót jest wykonywany wokół pewnej prostej i aby go jednoznacznie określić należy zadać zwrot tej prostej i określić, czy patrząc wzdłuż tej prostej zgodnie z jej zwrotem obrót odbywa się zgodnie, czy przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Dla uproszczenia będziemy rozważać jedynie obroty wokół osi przechodzącej przez początek układu współrzędnych.

W przeciwieństwie do obrotów na płaszczyźnie nie ma prostego wzoru na obrót w przestrzeni trójwymiarowej wokół dowolnej osi przy użyciu współrzędnych kartezjańskich x, y, z. Proste wzory uzyskujemy jedynie dla obrotów wokół osi układu współrzędnych.

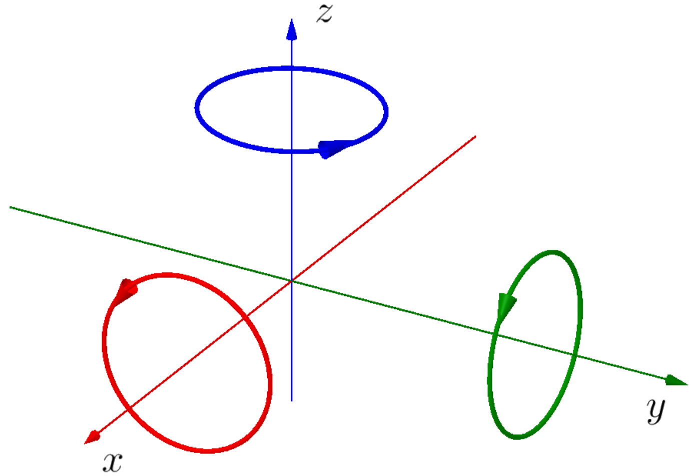
Najpierw należy jednak ustalić orientację układu współrzędnych. Standardowo stosuje się orientację zgodną z regułą trzech palców. Wyprostowany palec wskazujący prawej dłoni pokazuje zwrot osi OX. Zgięty palec środkowy pokazuje zwrot osi OY. Odwiedziony kciuk wskazuje wówczas zwrot osi OZ.

Stosując regułę, że

(1) układ współrzędnych jest zgodny z regułą trzech palców prawej dłoni;
(2) oś obrotu kieruje się w stronę obserwatora;
(3) kąt obrotu α jest dodatni;
(4) obrót jest przeciwny do ruchu wskazówek zegara

otrzymujemy następujące macierze obrotu wokół osi OX, OY i OZ:

$$O_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ 0, & \sin\alpha, & \cos\alpha \end{bmatrix}, \; O_{y,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\alpha, & 0, & \sin\alpha \\ 0, & 1, & 0 \\ -\sin\alpha, & 0, & \cos\alpha \end{bmatrix}, \; O_{z,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha, & 0 \\ \sin\alpha, & \cos\alpha, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}.$$



RYSUNEK 3. Obroty wokół osi w $\mathbb{R}^3$

Dowolny obrót w przestrzeni trójwymiarowej można otrzymać jako złożenie obrotów wokół osi układu współrzędnych. Przy takim podejściu może jednak dojść do sytuacji zwanej w języku angielskim jako „gimbal lock”.

Przykład 3. Rozważmy złożenie obrotu wokół osi OZ o kąt γ z obrotem wokół osi OY o kąt $\frac{\pi}{2}$ i obrotem wokół osi OX o kąt α. Takiemu złożeniu odpowiada iloczyn macierzy:

$$R = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ 0, & \sin\alpha, & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \\ -1, & 0, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\gamma, & -\sin\gamma, & 0 \\ \sin\gamma, & \cos\gamma, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}.$$

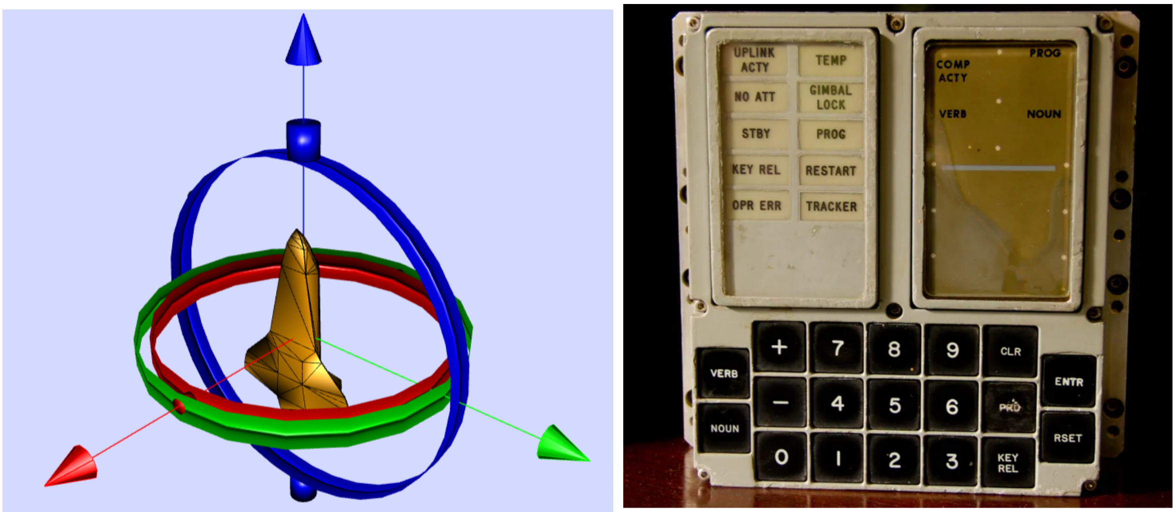
Mamy

$$R = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 1 \\ \sin\alpha, & \cos\alpha, & 0 \\ -\cos\alpha, & \sin\alpha, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\gamma, & -\sin\gamma, & 0 \\ \sin\gamma, & \cos\gamma, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0, & 0, & 1 \\ \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma, & -\sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma, & 0 \\ -\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma, & \cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\cos\gamma, & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0, & 0, & 1 \\ \sin(\alpha+\gamma), & \cos(\alpha+\gamma) & ,0 \\ -\cos(\alpha+\gamma), & \sin(\alpha+\gamma) & ,0 \end{bmatrix}$$

W wyjściowym wzorze na R mieliśmy dwa niezależne parametry α i γ, które w końcowym wzorze są połączone. W języku technicznym określa się to jako utratę jednego ze stopni swobody. Po angielsku jest to „gimbal lock”.



Rysunek 4. Gimbal lock. Po prawej tablica rozdzielcza w statku kosmicznym misji Apollo 11 z lampką ostrzegającą przed „gimbal lock”

Kwaterniony umożliwiają inny sposób zapisu obrotów w przestrzeni trójwymiarowej. Załóżmy, że q jest dowolnym kwaternionem takim, że $|q| = 1$. Niech $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Wektor ten utożsamiamy z kwaternionem $x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Oznaczamy

$$L_q v = qvq^*.$$

Znajdziemy bardziej użyteczny wzór na $L_q v$. Niech $r = Rq$ i $w = Vq$. Zgodnie ze wzorem (5) mamy $wv - vw = 2w \times v$. Ponadto ze wzoru (3) wynika, że $wv = -w \cdot v + w \times v$, zaś ze wzoru (6) wynika, że $wv = -vw - 2w \cdot v$. Korzystając z tych wzorów otrzymujemy

$$\begin{aligned} L_q v &= (r + w)v(r - w) = rvr - rvw + wvr - wvw = \\ &= r^2 v + r(wv - vw) - wvw = \\ &= r^2 v + 2r(w \times v) - (-vw - 2w \cdot v)w = \\ &= r^2 v + 2r(w \times v) + vww + 2(w \cdot v)w. \end{aligned}$$

Ale wzór (6) daje równość $ww = -w \cdot w = -|w|^2$, a więc ostatecznie dostajemy

$$L_q v = r^2 v + 2r(w \times v) - |w|^2 v + 2(w \cdot v)w = (r^2 - |w|^2)v + 2r(w \times v) + 2(w \cdot v)w. \tag{7}$$

Zauważmy, że trzy wektory, które są składnikami sumy po prawej stronie mają części rzeczywiste równe 0, co pokazuje, że funkcja L_q przekształca zbiór kwaternionów o części rzeczywistej 0 w siebie. Możemy więc traktować L_q jako przekształcenie przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Jest to przekształcenie liniowe, gdyż

$$\begin{aligned} L_q(sv + tw) &= q(sv + tw)q^* = (qsv + qtw)q^* = \\ &= qsvq^* + qtwq^* = sqvq^* + tqwq^* = sL_q v + tL_q w \end{aligned}$$

dla dowolnych liczb $s, t \in \mathbb{R}$ i dowolnych kwaternionów v, w o części rzeczywistej równej 0.

Twierdzenie 1. *Niech $q \in \mathbb{H}$, $|q| = 1$. Istnieje kąt $\theta \in [0, 2\pi]$ taki, że*

$$\cos\frac{\theta}{2} = Rq, \quad \sin\frac{\theta}{2} = |Vq| \tag{8}$$

i przekształcenie L_q jest obrotem przestrzeni $\mathbb{R}^3$ o kąt θ wokół osi wyznaczonej przez wektor Vq.

Dowód. Ponieważ

$$(Rq)^2 + |Vq|^2 = |q|^2 = 1,$$

więc istnieje kąt $\theta \in [0, 2\pi]$ spełniający warunki (8). Wykażemy teraz, że L_q zostawia na miejscu punkty na prostej wyznaczonej przez wektor Vq. Taki punkt ma postać $w = tVq$, gdzie $t \in \mathbb{R}$. Ponieważ $|q| = 1$, więc $q^{-1} = q^*$ i w konsekwencji $qq^* = 1$. Stąd

$$\begin{aligned} L_q w &= q(tw)q^* = tq(q - Rq)q^* = t(qqq^* - q(Rq)q^*) = \\ &= t(q - (Rq)qq^*) = t(q - Rq) = tVq = w. \end{aligned}$$

Wystarczy jeszcze wykazać, że jeśli $v \in \mathbb{R}^3$ jest wektorem prostopadłym do $w = Vq$, to $L_q v$ jest również prostopadły do w i kąt między v i $L_q v$ jest równy θ. Zatem $w \cdot v = 0$.

Przyjmując $u = \frac{1}{|w|} w$ otrzymujemy wektor taki, że $|u| = 1$ i

$$w = |w|u = u \sin\frac{\theta}{2}.$$

Stąd

$$q = Rq + Vq = \cos\frac{\theta}{2} + u \sin\frac{\theta}{2}. \tag{9}$$

Oznaczamy $r = Rq$. Wtedy $r = \cos\frac{\theta}{2}$. Ponadto $|w| = |u| \left|\sin\frac{\theta}{2}\right| = \left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$ i korzystając z (7) dostajemy

$$\begin{aligned} L_q v &= (r^2 - |w|^2)v + 2r(w \times v) + 2(w \cdot v)w = \\ &= \left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) v + 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} u \times v\right) = \\ &= (\cos\theta)v + 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}(u \times v) = \\ &= (\cos\theta)v + \sin\theta(u \times v). \end{aligned}$$

Wektor $v_1 = u \times v$ jest prostopadły do u i v, więc v i v_1 tworzą bazę ortogonalną w płaszczyźnie prostopadłej do wektora u. W bazie tej $L_q v$ ma współrzędne $\cos\theta$, $\sin\theta$, a więc kąt między $L_q v$ i v jest równy θ. $\square$

W dowodzie wyprowadziliśmy wzór na $L_q v$ dla wektora v prostopadłego do $w = Vq = u \sin\frac{\theta}{2}$. Dla dowolnego wektora $v \in \mathbb{R}^3$ mamy

$$w \cdot v = \sin\frac{\theta}{2}(u \cdot v),$$

więc

$$
(10) \qquad \begin{aligned} L_q v &= (r^2 - |w|^2)v + 2r(w \times v) + 2(w \cdot v)w = \\ &= (\cos\theta)v + \sin\theta(u \times v) + 2(w \cdot v)w = \\ &= (\cos\theta)v + \sin\theta(u \times v) + 2\sin^2\frac{\theta}{2}(u \cdot v)u = \\ &= (\cos\theta)v + \sin\theta(u \times v) + (1 - \cos\theta)(u \cdot v)u. \end{aligned}
$$

Przykład 4. Rozważmy obrót wokół osi wyznaczonej przez wektor $w = (1, 1, 1) = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ o kąt $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Mamy $|w| = \sqrt{3}$, więc $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ i w konsekwencji

$$
q = \cos\frac{\theta}{2} + u\sin\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + u\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}.
$$

Sprawdzimy, jakie są obrazy wektorów jednostkowych na osiach: $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ przy tym obrocie. Korzystając ze wzoru (10) otrzymujemy

$$
(11) \qquad L_q v = -\frac{1}{2}v + \frac{\sqrt{3}}{2}(u \times v) + \frac{3}{2}(u \cdot v)u.
$$

Dla $v = \mathbf{i}$, $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ mamy

$$
u \times v = \det\begin{bmatrix} \mathbf{i}, & \mathbf{j}, & \mathbf{k} \\ \frac{1}{\sqrt{3}}, & \frac{1}{\sqrt{3}}, & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1, & 0, & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{j} - \mathbf{k})
$$

oraz $u \cdot v = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Stąd

$$
L_q\mathbf{i} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}(\mathbf{j} - \mathbf{k}) + \frac{1}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = \mathbf{j}.
$$

Podobnie $L_q\mathbf{j} = \mathbf{k}$ oraz $L_q\mathbf{k} = \mathbf{i}$.

Ponieważ L_q jest przekształceniem liniowym, więc dla dowolnego $v = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, gdzie $x, y, z \in \mathbb{R}$ otrzymujemy

$$
L_q v = xL_q\mathbf{i} + yL_q\mathbf{j} + zL_q\mathbf{k} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}.
$$

Zauważmy, że we wzorze (10) występuje kąt obrotu θ i wektor u wyznaczający oś obrotu taki, że $|u| = 1$, a więc wektor, którego koniec leży na sferze o środku w punkcie 0 i promieniu 1. Taki wektor jest jednoznacznie określony przez współrzędne sferyczne, czyli dwa kąty będące odpowiednikami szerokości i długości geograficznej. Zatem obrót zapisany przy użyciu kwaternionów jest jednoznacznie określony przez trzy kąty, ale w odróżnieniu od sposobu zapisu obrotu jako złożenia obrotów wokół osi współrzędnych nie występuje tutaj „gimbal lock”.