**PIERŚCIENIE I CIAŁA**
**Wykład 2**

Prześledzimy metodę rozwiązywania równań trzeciego stopnia na przykładzie.

**Przykład 1.** Rozważmy równanie

$$x^3 + 6x^2 + 9x + 3 = 0. \tag{1}$$

Podstawiamy $y = x + 2$. Wtedy $x = y - 2$, więc

$$x^3 = (y-2)^3 = y^3 - 6y^2 + 12y - 8$$

oraz

$$6x^2 = 6(y-2)^2 = 6y^2 - 24y + 24.$$

Zatem

$$x^3 + 6x^2 + 9x + 3 = y^3 - 6y^2 + 12y - 8 + 6y^2 - 24y + 24 + 9y - 18 + 3 = y^3 - 3y + 1$$

i nasze równanie przyjmuje postać

$$y^3 - 3y + 1 = 0. \tag{2}$$

Ze wzoru

$$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = 3uv(u+v) + u^3 + v^3$$

dostajemy

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) = 0$$

i porównując to z równaniem (2) widzimy, że jeśli dobierzemy liczby $u, v$ tak, by $uv = 1$, $u^3 + v^3 = -1$, to $y = u + v$ będzie rozwiązaniem równania (2). Rozwiązujemy więc układ równań

$$u^3v^3 = 1,$$
$$u^3 + v^3 = -1.$$

Korzystając ze wzorów Viete'a stwierdzamy, że $u^3, v^3$ są pierwiastkami równania

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

Mamy $\Delta = -3$, więc

$$u^3 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad v^3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Stąd

$$u = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 1}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt[3]{\omega_1},$$

gdzie $\omega_1 = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ jest pierwiastkiem trzeciego stopnia z 1. Zatem możemy przyjąć $u = e^{\frac{2\pi}{9}i}$.

Z kolei

$$v = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt[3]{\omega_2}.$$

Ponieważ $\omega_2 = \overline{\omega_1}$, więc przyjmujemy $v = \overline{u}$. Stąd jednym z rozwiązań równania (2) jest

$$y_1 = u + v = u + \overline{u} = 2\operatorname{Re} u = 2\cos\frac{2\pi}{9}.$$

Zauważmy, że końcowy wynik jest liczbą rzeczywistą, chociaż w obliczeniach używaliśmy liczb zespolonych.

Pozostałe dwa rozwiązania to

$$y_2 = \omega_1 u + \omega_2 v = \omega_1 u + \overline{\omega_1 u} = 2 \operatorname{Re} \omega_1 u = 2 \cos \frac{8\pi}{9},$$
$$y_3 = \omega_2 u + \omega_1 v = \omega_2 u + \overline{\omega_2 u} = 2 \operatorname{Re} \omega_2 u = 2 \cos \frac{14\pi}{9} = 2 \cos \frac{4\pi}{9}.$$

Rozwiązania wyjściowego równania (1) otrzymujemy ze wzoru $x_k = y_k - 2$, $k = 1, 2, 3$.

Rozważmy dowolny wielomian $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ o współczynnikach rzeczywistych. Jeśli liczba zespolona $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ jest pierwiastkiem wielomianu $f$, to $f(z) = 0$, więc

$$0 = \overline{f(z)} = \overline{a_0} + \overline{a_1 z} + ... + \overline{a_n z^n} = \overline{a_0} + \overline{a_1} \cdot \overline{z} + ... + \overline{a_n} \cdot \overline{z}^n = a_0 + a_1 \overline{z} + ... + a_n \overline{z}^n = f(\overline{z}),$$

czyli również liczba sprzężona $\overline{z}$ jest pierwiastkiem wielomianu $f$.

W przypadku, gdy $n = 3$ i $a_3 > 0$, mamy $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, więc $f$ ma co najmniej jedno miejsce zerowe $x_0 \in \mathbb{R}$. Jest tak również w przypadku, gdy $a_3 < 0$. Zatem ogólnie $f$ ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty. Jeśli $f$ ma też pierwiastek $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, to trzecim pierwiastkiem jest $\overline{z} \neq z$. Mamy zatem dwie możliwości: albo $f$ ma jedynie pierwiastki rzeczywiste, albo $f$ ma jeden pierwiastek rzeczywisty i dwa pierwiastki zespolone, które są względem siebie sprzężone.

Ze wzoru Cardana

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + p^3}} \tag{3}$$

na rozwiązanie równania

$$x^3 + 3px + q = 0$$

wynika, że jeśli $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + p^3 > 0$, to $x$ jest pierwiastkiem rzeczywistym, a pozostałe dwa pierwiastki $\omega_1 u + \omega_2 v$, $\omega_2 u + \omega_1 v$, gdzie $\omega_1, \omega_2$ są zespolonymi pierwiastkami trzeciego stopnia z 1, są liczbami zespolonymi, nierzeczywistymi. Zatem $x$ jest w tym przypadku jedynym pierwiastkiem rzeczywistym.

Słabością wzoru Cardana są występujące w nim pierwiastki. Dla przykładu, równanie

$$x^3 + 3x - 4 = 0$$

ma rozwiązanie $x = 1$, ale wzór (3) daje

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}.$$

Ponieważ jest to przypadek, w którym $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + p^3 = 4 + 1 = 5 > 0$, więc jest to jedyny pierwiastek rzeczywisty, czyli $x = 1$ ale wzór Cardana daje jedynie uwikłaną postać tego pierwiastka.

### Równania czwartego stopnia

Metoda rozwiązywania równań 4 stopnia została znaleziona przez Lodovico Ferrariego – ucznia Cardana.

Rysunek 1. Lodovico Ferrari (1522–1565)

Lodovico Ferrari w wieku czternastu lat został służącym i pomocnikiem Cardana. Ten ostatni, po odkryciu że Lodovico potrafi czytać i pisać, uczynił go swoim asystentem i studentem.

W 18. roku życia Lodovico zaczął uczyć matematyki, a mając 19 lat objął posadę wykładowcy geometrii na uczelni w Rzymie (pozycję tę wcześniej zajmował Cardano). Z racji swojej pozycji u boku Cardana, a także wkładu w rozwiązywanie równań był uwikłany w spór pomiędzy Cardanem i Niccolò Tartaglią. 10 sierpnia 1548, w Mediolanie, doszło do debaty pomiędzy Tartaglią i Ferrarim. Z formalnego punktu widzenia, potyczka nie została rozstrzygnięta bowiem Tartaglia opuścił miasto przed jej ukończeniem. Jednak obserwujący zawody uznali, że Lodovico Ferrari posiada wiedzę i zrozumienie równań stopni 3 i 4 daleko przewyższającą wszystkich innych. Przyniosło to sporą sławę i uznanie młodemu Lodovico. Istnieją przypuszczenia, że Ferrari zmarł w wyniku otrucia arszenikiem przez swoją siostrę.

Niech $f \in \mathbb{C}[x]$ będzie wielomianem stopnia 4. Możemy założyć, że $f$ ma współczynnik 1 przy $x^4$, czyli

$$f(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

gdzie $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$.

Redukujemy teraz jednomian z niewiadomą w 3 potędze. W tym celu w równaniu $f(x) = 0$ podstawiamy $x = y - \frac{a_3}{4}$. Ponieważ

$$x^4 = \left(y - \frac{a_3}{4}\right)^4 = y^4 - 4y^3\frac{a_3}{4} + 6y^2\left(\frac{a_3}{4}\right)^2 - 4y\left(\frac{a_3}{4}\right)^3 + \left(\frac{a_3}{4}\right)^4 =$$
$$= y^4 - a_3y^3 + 6y^2\left(\frac{a_3}{4}\right)^2 - 4y\left(\frac{a_3}{4}\right)^3 + \left(\frac{a_3}{4}\right)^4$$

oraz

$$a_3x^3 = a_3\left(y - \frac{a_3}{4}\right)^3 = a_3y^3 - 3a_3y^2\frac{a_3}{4} + 3a_3y\left(\frac{a_3}{4}\right)^2 - a_3\left(\frac{a_3}{4}\right)^3,$$

więc w sumie tych wyrażeń zredukuje się $a_3y^3$ i równanie $f(x)=0$ przyjmie postać

$$y^4+py^2-qy+r=0 \tag{4}$$

dla pewnych $p,q,r\in\mathbb{C}$.

Dobieramy teraz $z$ tak, aby

$$-8z^3+4pz^2+8rz-4pr+q^2=0. \tag{5}$$

Oznacza to, że $z$ jest pierwiastkiem równania trzeciego stopnia, więc możemy go wyznaczyć ze wzoru Cardana.

Równanie (4) zapisujemy jako

$$y^4=-py^2+qy-r$$

i po dodaniu $2zy^2+z^2$ do obu stron otrzymujemy

$$y^4+2zy^2+z^2=(2z-p)y^2+qy+(z^2-r). \tag{6}$$

Lewa strona jest równa $(y^2+z)^2$. Ze wzoru (5) otrzymujemy

$$q^2=8z^3-4pz^2-8rz+4pr=4(2z-p)(z^2-r),$$

czyli

$$q=2\sqrt{2z-p}\cdot\sqrt{z^2-r},$$

więc prawa strona wzoru (6) jest równa

$$\begin{aligned}(2z-p)y^2+qy+(z^2-r)&=(2z-p)y^2+2y\sqrt{2z-p}\cdot\sqrt{z^2-r}+(z^2-r)=\\&=\left(y\sqrt{2z-p}+\sqrt{z^2-r}\right)^2.\end{aligned}$$

Zatem (6) można zapisać w postaci

$$(y^2+z)^2=\left(y\sqrt{2z-p}+\sqrt{z^2-r}\right)^2,$$

czyli $y$ jest rozwiązaniem równania kwadratowego

$$y^2+z=y\sqrt{2z-p}+\sqrt{z^2-r}$$

i w konsekwencji $x=y-\frac{a_3}{4}$ jest rozwiązaniem równania $f(x)=0$.

Dla $n\geqslant 5$ istnieją wielomiany stopnia $n$, których pierwiastków nie można wyrazić ze współczynników przez działania algebraiczne i pierwiastkowanie. Ogólne wzory na pierwiastki wielomianów stopni większych niż 4 są możliwe do uzyskania jedynie dla pewnych szczególnych wielomianów.

## Wielomiany palindromiczne

Wielomianem palindromicznym nazywamy wielomian

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\in\mathbb{C}[x],$$

którego współczynniki tworzą palindrom, czyli $a_k=a_{n-k}$ dla $k=0,1,...,n$. Zatem

$$f(x)=a_0+a_1x+...+a_1x^{n-1}+a_0x^n.$$

Wielomian $f$ jest antypalindromiczny, jeśli jego współczynniki spełniają warunek $a_k = -a_{n-k}$ dla $k = 0, 1, ..., n$, czyli

$$f(x) = a_0 + a_1x + ... - a_1x^{n-1} - a_0x^n.$$

W szczególności, jeśli $n$ jest parzyste, czyli $n = 2m$, gdzie $m \in \mathbb{N}$, to $a_m = -a_{n-m} = -a_m$. Zatem $2a_m = 0$, czyli środkowy współczynnik $a_m = 0$.

**Twierdzenie 1.** *Wielomian $f$ stopnia $n$ jest wielomianem palindromicznym wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) \tag{7}$$

*Dowód.* Dla wielomianu palindromicznego $f$ mamy

$$\begin{aligned} x^n f\left(\frac{1}{x}\right) &= x^n\left(a_0 + a_1\frac{1}{x} + ... + a_1\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} + a_0\left(\frac{1}{x}\right)^n\right) = \\ &= x^n\left(a_0 + a_1\frac{1}{x} + ... + a_1\frac{1}{x^{n-1}} + a_0\frac{1}{x^n}\right) = \\ &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = f(x). \end{aligned}$$

Na odwrót załóżmy, że wielomian $f = a_0 + a_1x + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ spełnia warunek $f(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$. Wtedy

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n &= x^n\left(a_0 + a_1\frac{1}{x} + ... + a_{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} + a_n\frac{1}{x^n}\right) = \\ &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n, \end{aligned}$$

więc $a_k = a_{n-k}$ dla $k = 0, 1, ..., n$, czyli $f$ jest wielomianem palindromicznym. □

Podobnie wielomian $f$ jest antypalindromiczny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x). \tag{8}$$

**Wniosek 1.** *Jeżeli $f, g \in \mathbb{C}[x]$ są wielomianami palindromicznymi, to ich iloczyn $fg$ jest wielomianem palindromicznym.*

*Dowód.* Załóżmy, że $\operatorname{st} f = k$, $\operatorname{st} g = l$. Wtedy $n = \operatorname{st}(fg) = k + l$ i mamy

$$x^n(fg)\left(\frac{1}{x}\right) = x^k f\left(\frac{1}{x}\right) x^l g\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)g(x) = (fg)(x),$$

co wobec twierdzenia 1 pokazuje, że $fg$ jest wielomianem palindromicznym. □

Zauważmy jeśli $f$ jest wielomianem palindromicznym, to jego wyraz wolny $a_0$ jest też współczynnikiem przy $x^n$, więc jeżeli $\operatorname{st} f = n$, to $a_0 \neq 0$. W szczególności 0 nie może być pierwiastkiem $f$. Jeśli $a$ jest pierwiastkiem wielomianu palindromicznego, to ze wzoru (8) otrzymujemy

$$a^n f\left(\frac{1}{a}\right) = f(a) = 0,$$

czyli odwrotność $\frac{1}{a}$ jest również pierwiastkiem $f$. Podobnie dla wielomianu antypalindromicznego $f$, jeśli $a$ jest pierwiastkiem $f$, to $\frac{1}{a}$ jest również pierwiastkiem $f$.

**Przykład 2.** Rozważmy unormowany wielomian palindromiczny $f$ stopnia 2, czyli $f(x) = x^2 + bx + 1$. Jego pierwiastkami są

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4}}{2}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4}}{2} = \frac{1}{x_1}.$$

Wstawiając $x = 1$ we wzorze (8) otrzymujemy $f(1) = -f(1)$, czyli $f(1) = 0$. Zatem 1 jest pierwiastkiem dowolnego wielomianu antypalindromicznego.

Z kolei dla wielomianu palindromicznego $f$ wstawiając $x = -1$ do wzoru (7) dostajemy

$$(-1)^n f(-1) = f(-1),$$

a więc jeśli $n = \operatorname{st} f$ jest liczbą nieparzystą, to $f(-1) = 0$. Zatem $-1$ jest pierwiastkiem dowolnego wielomianu palindromicznego nieparzystego stopnia.

**Twierdzenie 2.** *Jeżeli $f$ jest wielomianem palindromicznym i $n = \operatorname{st} f$ jest liczbą nieparzystą, to*

$$f(x) = (x+1)g(x),$$

*gdzie $g$ jest wielomianem palindromicznym.*

*Dowód.* Jak wiemy $f(-1) = 0$, więc $f$ dzieli się przez $x + 1$. Zatem

$$f(x) = (x+1)g(x) \tag{9}$$

dla pewnego wielomianu $g$ stopnia $n-1$ i zastępując w tym wzorze $x$ przez $\frac{1}{x}$ oraz mnożąc obie strony przez $x^n$ dostajemy

$$\begin{aligned} f(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = x^n \left(\frac{1}{x} + 1\right) g\left(\frac{1}{x}\right) = \\ = (1+x)x^{n-1} g\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Porównując to ze wzorem (9) otrzymujemy

$$x^{n-1} g\left(\frac{1}{x}\right) = g(x),$$

co pokazuje, że $g$ jest wielomianem palindromicznym. □

Z twierdzenia 2 wynika, że szukając pierwiastków wielomianu palindromicznego $f$ stopnia nieparzystego możemy przejść do pierwiastków wielomianu $g$, który ma stopień o 1 mniejszy. Dla uproszczenia możemy rozważać wielomiany unormowane, co w przypadku wielomianu palindromicznego oznacza, że $a_n = a_0 = 1$.

**Przykład 3.** Niech $f$ będzie unormowanym wielomianem palindromicznym stopnia 3, czyli

$$f = 1 + ax + ax^2 + x^3.$$

Wtedy rozkład (9) ma postać

$$f(x) = (x+1)(x^2 + (a-1)x + 1),$$

więc pierwiastkami wielomianu $f$ są:

$$-1, \quad u = \frac{1 - a + \sqrt{(a-1)^2 - 4}}{2}, \quad \frac{1}{u} = \frac{1 - a - \sqrt{(a-1)^2 - 4}}{2}.$$

W powyższym przykładzie zredukowaliśmy problem wyznaczania pierwiastków wielomianu palindromicznego stopnia 3 do wyznaczania pierwiastków pewnego wielomianu stopnia 2.

**Lemat 1.** *Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje wielomian $f \in \mathbb{Z}[x]$ taki, że*

$$x^n + \frac{1}{x^n} = f\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

*Dowód.* Stosujemy indukcję względem $n$. Dla $n = 1$ mamy $f(y) = y$. Załóżmy, że lemat zachodzi dla wszystkich $n \leqslant k$. W szczególności istnieją wielomiany $f_{k-1}, f_k \in \mathbb{Z}[x]$ takie, że

$$x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}} = f_{k-1}\left(x + \frac{1}{x}\right), \quad x^k + \frac{1}{x^k} = f_k\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Mamy

$$\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{k+1} + x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}} + \frac{1}{x^{k+1}},$$

więc

$$f_k\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} + f_{k-1}\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Stąd

$$x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = f_k\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - f_{k-1}\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

□

**Przykład 4.** Dla $n = 2$ mamy

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2},$$

więc

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2. \tag{10}$$

Następnie

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3x \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right),$$

więc

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right). \tag{11}$$

Lemat 1 pozwala zredukować problem wyznaczania pierwiastków wielomianu palindromicznego stopnia $2n$ do wyznaczania pierwiastków wielomianu niekoniecznie palindromicznego stopnia $n$.

**Przykład 5.** Niech $f$ będzie unormowanym wielomianem palindromicznym stopnia 4, czyli

$$f(x) = 1 + ax + bx^2 + ax^3 + x^4.$$

Dzieląc obie strony równania $f(x) = 0$ przez $x^2$ otrzymujemy

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = \frac{1}{x^2} + a\frac{1}{x} + b + ax + x^2 = \frac{f(x)}{x^2} = 0. \tag{12}$$

Niech $y = x + \frac{1}{x}$. Stosując wzór (10) dostajemy

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2,$$

więc równanie (12) przyjmuje postać

$$y^2 + ay + b - 2 = 0.$$

Dla przykładu rozwiążemy równanie

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 4x + 1 = 0. \tag{13}$$

Po podstawieniu $y = x + \frac{1}{x}$ dostajemy równanie

$$y^2 + 4y - 4 = 0, \tag{14}$$

którego rozwiązanie to

$$y = \frac{-4 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 2(-1 \pm \sqrt{2}).$$

Zależność między $x$ i $y$ daje równanie

$$x^2 - yx + 1 = 0,$$

więc

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}. \tag{15}$$

Bezpośrednio z (14) widzimy, że

$$y^2 - 4 = -4y = 8(1 \pm \sqrt{2}),$$

co po wstawieniu do wzoru (15) daje

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2} = -1 + \varepsilon_1\sqrt{2} + \varepsilon_2\sqrt{2}\sqrt{1 - \varepsilon_1\sqrt{2}},$$

gdzie $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ są równe 1 lub $-1$. Daje to cztery rozwiązania równania (13):

$$-1 - \sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{1 + \sqrt{2}}, \quad -1 - \sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{1 + \sqrt{2}},$$
$$-1 + \sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{1 - \sqrt{2}}, \quad -1 + \sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{1 - \sqrt{2}}.$$

**Przykład 6.** Rozważmy teraz unormowany wielomian palindromiczny stopnia 6:

$$f(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_2x^4 + a_1x^5 + x^6.$$

Aby zastąpić go wielomianem zmiennej $y = x + \frac{1}{x}$ dzielimy obie strony równości $f(x) = 0$ przez $x^3$ i otrzymujemy

$$\frac{1}{x^3} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x} + a_3 + a_2x + a_1x^2 + x^3 = 0,$$

czyli

$$\frac{1}{x^3} + x^3 + a_1\left(\frac{1}{x^2} + x^2\right) + a_2\left(\frac{1}{x} + x\right) + a_3 = 0. \tag{16}$$

Ze wzorów (11) i (10) dostajemy

$$\frac{1}{x^3} + x^3 = y^3 - 3y,$$

$$\frac{1}{x^2} + x^2 = y^2 - 2.$$

Po wstawieniu tych wzorów do (16) otrzymujemy równanie

$$y^3 + a_1 y^2 + (a_2 - 3)y + a_3 - 2 = 0,$$

które możemy rozwiązać używając wzorów Cardana. Następnie dla każdego rozwiązania $y$ znajdujemy $x$ takie, że $y = \frac{1}{x} + x$, czyli $x$ jest rozwiązaniem równania kwadratowego $x^2 - yx + 1 = 0$.

Podobnie równanie z wielomianem palindromicznym stopnia 8 możemy sprowadzić do równania stopnia 4. Widzimy więc, że dla wielomianów palindromicznych pierwiastki można wyzanaczyć nie tylko dla wielomianów stopnia $2, 3, 4$, ale także stopnia $5, 6, 7, 8$.