PIERŚCIENIE I CIAŁA

Wykład 1

Literatura

(1) Maciej Bryński, Jerzy Jurkiewicz, *Zbiór zadań z algebry*, PWN, 1985.
(2) William J. Gilbert, W. Keith Nicholson, *Algebra współczesna z zastosowaniami*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2008.
(3) Nadiya Gubareni, *Algebra współczesna i jej zastosowania*, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, 2018.
(4) Robert Rałowski, *Elementy teorii Galois*, Politechnika Wrocławska (plik dostępny w Internecie).
(5) Jerzy Rutkowski, *Algebra abstrakcyjna w zadaniach*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2000.
(6) Marek Zakrzewski, *Markowe Wykłady z Matematyki. Algebra z geometrią*, Oficyna Wydawnicza GiS, 2015.

Z kart historii matematyki

Włoski matematyk z Uniwersytetu w Bolonii, Scipione del Ferro (1465–1526) podał metodę rozwiązania pewnych typów równań trzeciego stopnia. Nie rozgłaszał on swoich odkryć i przekazał swoją metodę jedynie paru osobom, w tym jego studentowi Fiorowi. Del Ferro zapisywał wszystkie swoje odkrycia w notatniku, który po jego śmierci przeszedł w posiadanie Hannibala Navego, zięcia del Ferro. (Nave był również matematykiem i po śmierci teścia w 1526 r. przejął jego posadę na Uniwersytecie Bolońskim).

Niezależnie (ale i później) metodę rozwiązania takich równań znalazł Niccolò Tartaglia z Wenecji. Potrafił on rozwiązać niektóre typy równań trzeciego stopnia i w 1535 r. zaaranżowano mecz matematyczny pomiędzy Fiorem a Tartaglią. W czasie tej debaty każda ze stron podała drugiej 30 równań do rozwiązania. Podczas gdy zadania przygotowane przez Tartaglię były bardzo różnorodne, te podane przez Fiora dotyczyły tylko jedynego typu równań, które Fior potrafił rozwiązać. Rankiem 13 lutego 1535 r. Tartaglia odkrył sposób rozwiązania tego typu równań i mecz wygrał. Swojej metody rozwiązywania równań Tartaglia nie chciał jednak ogłosić.

Rysunek 1. Girolamo Cardano (1501–1576)

Inny włoski matematyk, Girolamo Cardano uprosił Tartaglię w 1539 r. o wyjawienie metody rozwiązywania równań sześciennych, w zamian zobowiązując się do dochowania tajemnicy i nieujawniania metody. W 1540 r. Lodovico Ferrari, asystent Cardana, odkrył metodę redukcji równań czwartego stopnia do równań sześciennych. Razem z metodą rozwiązywania tych ostatnich pozwalało to rozwiązać wszystkie typy równań stopnia 4, jednak odkrycie to nie mogło zostać opublikowane ze względu na obietnicę daną Tartaglii.

W 1543 r. Cardano i Ferrari odwiedzili Navego, zięcia del Ferro, w Bolonii i dowiedzieli się od niego, że to del Ferro był pierwszym matematykiem, który rozwiązał równania trzeciego stopnia. Cardano uznał, że obietnica dana Tartaglii nie obowiązuje go więcej i opublikował metodę rozwiązywania równań 3. i 4. stopnia w swoim dziele Ars Magna w 1545 r.

Zagadnienie poszukiwania wzorów, które pozwalałyby rozwiązywać równania algebraiczne stopni wyższych niż czwarty było otwarte przez ok. 300 lat. Problem ten rozstrzygnął francuski matematyk Évariste Galois.

Rysunek 2. Évariste Galois (1811–1832)

Galois matematyką zainteresował się przez przypadek w wieku 15 lat podczas wizyty w szkolnej bibliotece. Dwukrotnie nie zdał egzaminu wstępnego z matematyki do École Polytechnique, gdyż w odpowiedzi na zbyt łatwe dla niego pytania egzaminujących ograniczał się do zwięzłych, tylko dla niego zrozumiałych stwierdzeń odmawiając szerszego objaśnienia.

Galois wykazał, że w ogólnym przypadku dla równań stopnia wyższego niż czwarty, nie można znaleźć wzorów, które pozwalałyby te równania rozwiązywać tak, jak ma to miejsce w przypadku równań stopnia niższego, gdyż takie wzory nie mogą istnieć.

Galois żył w okresie politycznego zamętu we Francji i brał aktywny udział w życiu politycznym należąc do lewicowego stronnictwa „Przyjaciół ludu". Przez swoją działalność dwukrotnie trafił do więzienia. Zakochał się w córce lekarza więziennego. Prawdopodobnie z jej powodu uwikłał się w pojedynek i 31 maja 1832 r. zmarł w paryskim szpitalu z powodu ran odniesionych w pojedynku. Dwa dni przed śmiercią w liście do przyjaciela tak napisał o swoich notatkach matematycznych: *Mam nadzieję, że kiedyś znajdą się ludzie, którzy uznają za pożyteczne rozszyfrowanie całego tego bałaganu.*

Rysunek 3. notatki Galois

Pierwiastki zespolone

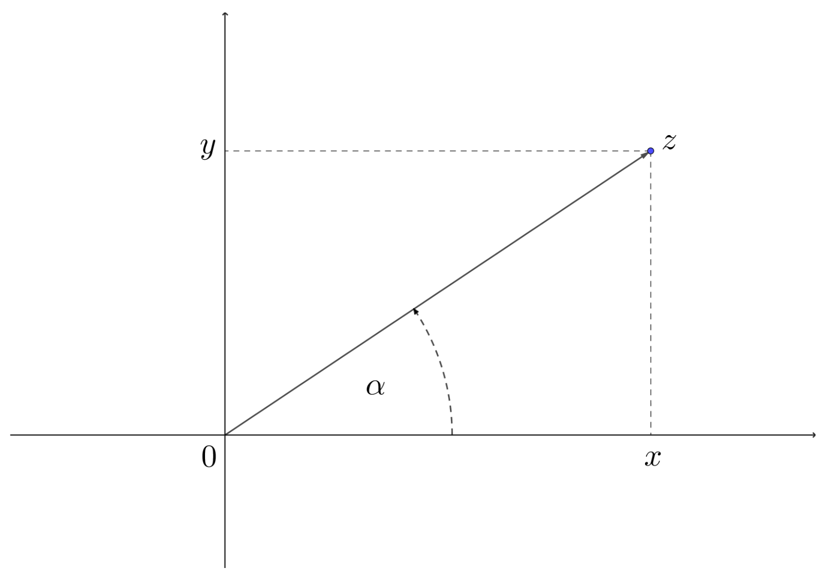
Przypomnijmy, że każdą niezerową liczbę zespoloną $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$ można też przedstawić w postaci trygonometrycznej

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

gdzie

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

jest modułem liczby z, zaś $\alpha \in \mathbb{R}$ jest argumentem tej liczby. Argument nie jest wyznaczony jednoznacznie. Jeśli α jest argumentem liczby z, to każda liczba postaci $\alpha + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ jest też argumentem z. Wartość argumentu należąca do przedziału $[0, 2\pi)$ jest wyznaczona jednoznacznie i nazywamy ją argumentem głównym liczby z.



Stosuje się oznaczenie

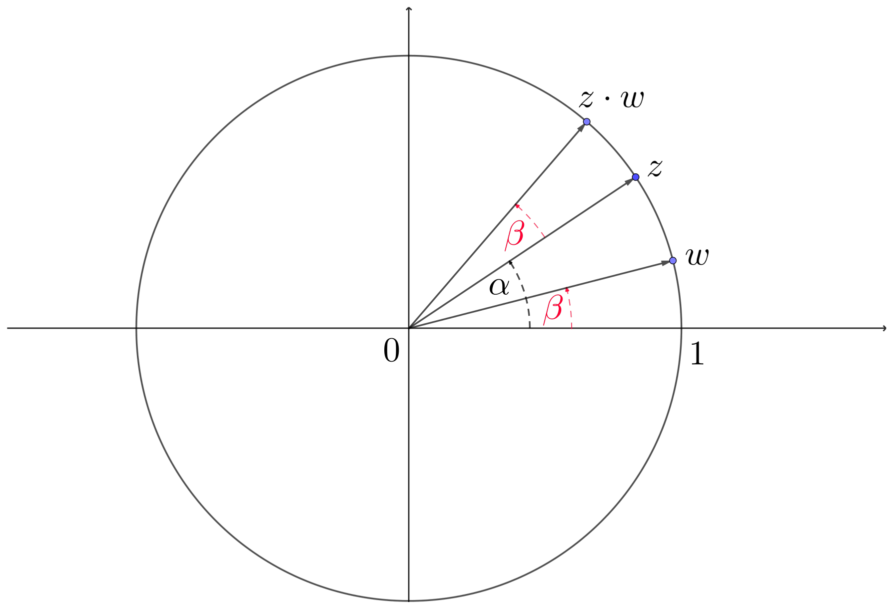
$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

Wtedy

$$z = |z|e^{i\alpha}.$$

Jest to zgodne ze wzorem na mnożenie liczb zespolonych danych w postaci trygonometrycznej. Jeśli liczby zespolone z i w leżą na okręgu o środku 0 i promieniu 1, czyli $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $w = \cos\beta + i\sin\beta$, to

$$e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = z \cdot w = \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta) = e^{i(\alpha+\beta)}.$$



Wzór de Moivre'a na potęgę liczby zespolonej ma w tym zapisie postać

$$\left(|z|e^{i\alpha}\right)^n = |z|^n e^{in\alpha},$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$.

Dla dowolnej liczby zespolonej $z \neq 0$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ istnieje n pierwiastków stopnia n z liczby z. Jeśli $z = |z|e^{i\alpha}$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$, to pierwiastki te są dane wzorami

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{1}{n}(\alpha+2k\pi)} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$$

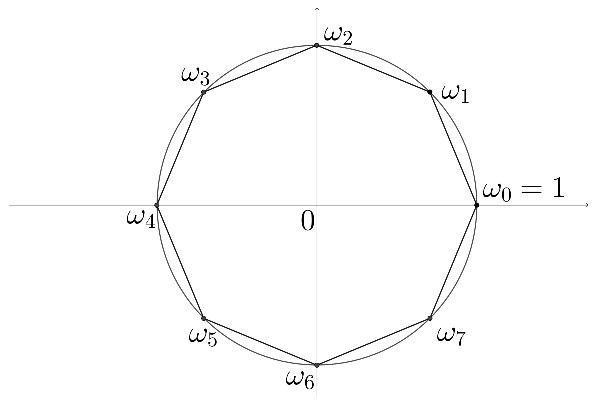
dla $k = 0, 1, ..., n-1$.

W szczególności biorąc $z = 1 = e^{i0}$ otrzymujemy n zespolonych pierwiastków z 1. Są one dane wzorami

$$\omega_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

dla $k = 0, 1, ..., n-1$. W szczególności $\omega_0 = 1$.

Dla $n = 2$ mamy dwa pierwiastki: $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = -1$. Dla $n \geqslant 3$ pierwiastki ω_0, ω_1,...,ω_{n-1} są wierzchołkami n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o środku w punkcie 0 i promieniu 1.



W szczególności pierwiastki $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ trzeciego stopnia z 1 są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Dane są wzorami: $\omega_0 = 1$,

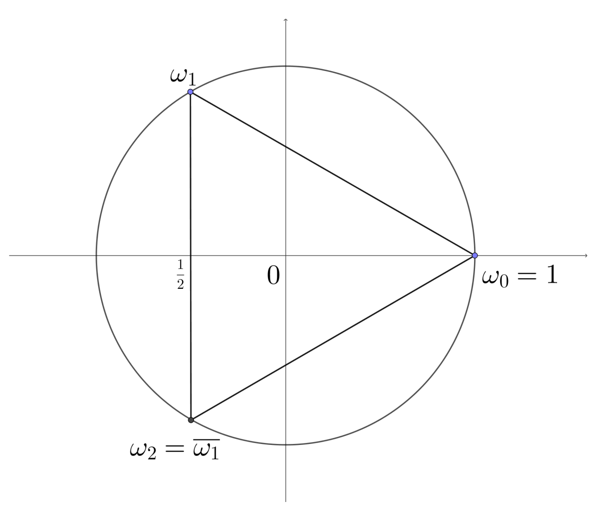
$$\begin{aligned} \omega_1 &= e^{\frac{2\pi}{3}i} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \omega_2 &= e^{\frac{4\pi}{3}i} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Zauważmy, że $\omega_2 = \overline{\omega_1}$, więc

$$\omega_1\omega_2 = \omega_1\overline{\omega_1} = |\omega_1|^2 = 1,$$

czyli

$$\omega_2 = \omega_1^{-1}. \tag{2}$$



Pierwiastki stopnia n z liczby z są pierwiastkami wielomianu $f(x) = x^n - z$. Prawdziwe jest następujące ***zasadnicze twierdzenie algebry***.

Twierdzenie 1. *Każdy wielomian f o współczynnikach zespolonych stopnia co najmniej 1 ma co najmniej jeden pierwiastek zespolony, czyli istnieje liczba $z \in \mathbb{C}$ taka, że $f(z) = 0$.*

Przez $\mathbb{C}[x]$ oznaczmy zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach z ciała liczb zespolonych $\mathbb{C}$.

Wzory Viete'a

Z twierdzenia 1 wynika, że każdy taki wielomian f stopnia n można zapisać w postaci

$$f(x) = c(x - z_1)(x - z_2)...(x - z_n), \tag{3}$$

gdzie c jest niezerową liczbą zespoloną i $z_1, z_2, ..., z_n$ są pierwiastkami wielomianu f (uwaga: liczby w ciągu $z_1, z_2, ..., z_n$ mogą się powtarzać). Porównując postać (3) ze zwykłą postacią wielomianu

$$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \tag{4}$$

otrzymujemy ***wzory Viete'a***.

Dla uproszczenia można przyjąć, że $a_n = 1$. Wystarczy podzielić obie strony (4) przez a_n i zastąpić f przez wielomian $\frac{1}{a_n} f$, który ma te same pierwiastki $z_1, z_2, ..., z_n$ co f. Ze wzoru (3) wynika, że współczynnik przy x^n jest równy c, więc jeśli $a_n = 1$, to $c = 1$.

Przypadek, gdy $n = 2$.
Wtedy

$$f(x) = a_0 + a_1 x + x^2 = (x - z_1)(x - z_2) = x^2 - z_1 x - z_2 x + z_1 z_2 = z_1 z_2 - (z_1 + z_2)x + x^2.$$

Stąd $a_0 = z_1 z_2$, $a_1 = -(z_1 + z_2)$. Wzory te można otrzymać również ze wzorów na pierwiastki równania kwadratowego $a_0 + a_1 x + x^2 = 0$. Możemy przyjąć, że

$$z_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad z_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2},$$

gdzie $\Delta = a_1^2 - 4a_0$, więc $z_1 + z_2 = -a_1$, $z_1 z_2 = \frac{1}{4}(a_1^2 - \Delta) = a_0$.

Przypadek, gdy $n = 3$.
Wtedy

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + x^3 = (x - z_1)(x - z_2)(x - z_3) = \\ &= x^3 - z_1 x^2 - z_2 x^2 - z_3 x^2 + z_1 z_2 x + z_1 z_3 x + z_2 z_3 x - z_1 z_2 z_3 = \\ &= -z_1 z_2 z_3 + (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)x - (z_1 + z_2 + z_3)x^2 + x^3. \end{aligned}$$

Stąd $a_0 = -z_1 z_2 z_3$, $a_1 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$, $a_2 = -(z_1 + z_2 + z_3)$.

W ogólnym przypadku jeśli $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1} x^{n-1} + x^n$, to

$$a_{n-k} = (-1)^k \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < ... < i_k \leqslant n} z_{i_1} z_{i_2} ... z_{i_k}$$

dla $k = 1, ..., n$.

W szczególności podstawiając $k = n$ i $k = 1$ otrzymujemy wzory:

$$a_0 = (-1)^n z_1 z_2 ... z_n, \quad a_{n-1} = -(z_1 + z_2 + ... + z_n).$$

Pierwiastki n-tego stopnia z 1: $\omega_0, \omega_1, ..., \omega_{n-1}$ są pierwiastkami wielomianu $f(x) = x^n - 1$. Stosując wzory Viete'a dla tego wielomianu otrzymujemy $(-1)^n \omega_0 \omega_1 ... \omega_{n-1} = -1$, czyli

$$\omega_0 \omega_1 ... \omega_{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

Ponadto

$$\omega_0 + \omega_1 + ... + \omega_{n-1} = 0.$$

Wzory Cardano

Niech $f \in \mathbb{C}[x]$ będzie wielomianem stopnia 3. Mnożąc ten wielomian przez odwrotność współczynnika przy x^3 otrzymujemy wielomian postaci

$$g(x) = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x],$$

który ma te same pierwiastki, co f. Zatem pierwiastki wielomianu f są rozwiązaniami równania postaci

$$x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0. \tag{5}$$

Krok I – pozbywamy się niewiadomej w drugiej potędze. W tym celu podstawiamy $y = x + \frac{a_2}{3}$. Wtedy $x = y - \frac{a_2}{3}$, więc

$$x^3 = \left(y - \frac{a_2}{3}\right)^3 = y^3 - a_2 y^2 + \frac{a_2^2}{3} y - \frac{a_2^3}{27},$$
$$a_2 x^2 = a_2 \left(y - \frac{a_2}{3}\right)^2 = a_2 y^2 - \frac{2}{3} a_2 y + \frac{a_2^2}{9}$$

i równanie (5) przyjmuje postać

$$y^3 + \frac{a_2^2}{3} y - \frac{a_2^3}{27} - \frac{2}{3} a_2 y + \frac{a_2^2}{9} + a_1 y - \frac{a_1 a_2}{3} + a_0 = 0,$$

w której nie występuje y^2, a więc można je zapisać jako

$$y^3 + 3py + q = 0, \tag{6}$$

gdzie $p, q \in \mathbb{C}$.

Krok II – redukcja do równania kwadratowego. Dla dowolnych liczb $u, v \in \mathbb{C}$ zachodzi wzór

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2 v + 3uv^2 + v^3 = 3uv(u + v) + u^3 + v^3,$$

czyli

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0.$$

Porównując ten wzór z (6) widzimy, że jeśli $uv = -p$ i $u^3 + v^3 = -q$, to $y = u + v$ jest rozwiązaniem równania (6).

Szukamy zatem u, v takich, że

$$\begin{aligned} u^3 v^3 &= -p^3 \\ u^3 + v^3 &= -q. \end{aligned} \tag{7}$$

Za wzorów Viete'a wiemy, że warunki powyższe są spełnione, jeśli u^3, v^3 są pierwiastkami równania

$$z^2 + qz - p^3 = 0. \tag{8}$$

Dla tego równania mamy $\Delta = q^2 + 4p^3$, więc rozwiązania u^3, v^3 tego równania wyrażają się wzorem

$$\frac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4p^3}}{2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + p^3}.$$

Zatem

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + p^3}, \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + p^3},$$

czyli

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + p^3}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + p^3}}. \tag{9}$$

Zatem jednym z rozwiązań równania (6) jest

$$y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + p^3}}. \tag{10}$$

Aby znaleźć pozostałe rozwiązania zauważmy, że jeśli pomnożyć u i v przez pierwiastki ω_k, ω_l trzeciego stopnia z 1, to $(\omega_k u)^3 = \omega_k^3 u^3 = u^3$ i $(\omega_l v)^3 = \omega_l^3 v^3 = v^3$, więc $\omega_k u$ i $\omega_l v$ są również rozwiązaniami układu równań (7), czyli $\omega_k u$ i $\omega_l v$ są rozwiązaniami równania (8).

Jednakże u, v spełniają także warunek $uv = -p$ i aby $\omega_k u \omega_l v = -p$ musi być spełniony warunek $\omega_k \omega_l = 1$, czyli $\omega_k = \omega_l^{-1}$. Ze wzoru (2) wiemy, że pierwiastki ω_1, ω_2 są względem siebie odwrotne, więc otrzymujemy trzy rozwiązania równania (6):

$$u + v, \quad \omega_1 u + \omega_2 v, \quad \omega_2 u + \omega_1 v.$$

Po wstawieniu tych wartości za y do wzoru $x = y - \frac{a_2}{3}$ otrzymujemy pierwiastki wyjściowego wielomianu f.

Przykład 1. Rozważmy równanie

$$x^3 - 3x + 1 = 0.$$

Jest to równanie postaci (6) z $p = -1$, $q = 1$, więc zgodnie ze wzorem (10) mamy

$$u = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 1}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt[3]{\omega_1},$$

gdzie $\omega_1 = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ jest pierwiastkiem trzeciego stopnia z 1. Zatem możemy przyjąć $u = e^{\frac{2\pi}{9}i}$.

Z kolei

$$v = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt[3]{\omega_2}.$$

Ponieważ $\omega_2 = \overline{\omega_1}$, więc przyjmujemy $v = \overline{u}$. Stąd jednym z rozwiązań naszego równania jest

$$x_1 = u + v = u + \overline{u} = 2\operatorname{Re} u = 2\cos\frac{2\pi}{9}.$$

Zauważmy, że końcowy wynik jest liczbą rzeczywistą, chociaż w obliczeniach używaliśmy liczb zespolonych.

Pozostałe dwa rozwiązania to

$$x_2 = \omega_1 u + \omega_2 v = \omega_1 u + \overline{\omega_1 u} = 2\,\mathrm{Re}\,\omega_1 u = 2\cos\frac{8\pi}{9},$$
$$x_3 = \omega_2 u + \omega_1 v = \omega_2 u + \overline{\omega_2 u} = 2\,\mathrm{Re}\,\omega_2 u = 2\cos\frac{14\pi}{9} = 2\cos\frac{4\pi}{9}.$$