Logika - powtórzenie wiadomości

Rozdział 1 – *Formuły logiki zdaniowej*

W logice zdaniowej zdania elementarne oznaczamy literami: P, Q, R, S lub P z indeksem ($P_0, P_1, P_2, ...$)

- $\neg P$ – negacja - „nieprawda, że P”
- $(P \wedge Q)$ – koniunkcja - „P i Q”
- $(P \vee Q)$ – alternatywa - „P lub Q”
- $(P \rightarrow Q)$ – implikacja - „jeżeli P, to Q”
- $(P \leftrightarrow Q)$ – równoważność - „P wtedy, i tylko wtedy gdy Q”

Wszystkie formuły oprócz negacji obowiązkowo muszą być w nawiasach. Cała formuła również musi być ujęta w nawiasy.

Formuły można ze sobą łączyć, tworząc bardziej skomplikowane formuły, np.:

$$((P \wedge Q) \vee \neg(P \wedge Q))$$

Składa się z 5 formuł:

$$\begin{array}{ll} 1.((P \wedge Q) \vee \neg(P \wedge Q)) & \\ 2.(P \wedge Q) & 3.\neg\ (P \wedge Q) \\ 4.P\ 5.Q & \cancel{(P \wedge Q)} \end{array}$$

Formuły tworzą strukturę drzewa. Spójniki łączą jedną lub dwie formuły. Przy wypisywaniu formuł pomijamy te, które się powtarzają.

Tautologia logiki zdaniowej

Każde zdanie może mieć wartość logiczną 0 (fałsz) lub 1 (prawda). Zdania dzielimy na:

- *tautologiczne* (zwane również *prawami logicznymi*) - zawsze prawdziwe, np. „pada deszcz lub nie pada deszcz”,
- *sprzeczne* - zawsze fałszywe,
- *spełnialne* – ich wartość logiczna zależy od świata w którym się znajdujemy.

P	Q	$\neg P$	$(P \wedge Q)$	$(P \vee Q)$	$(P \rightarrow Q)$	$(P \leftrightarrow Q)$
0	0	1	0	0	1	1

P	Q	$\neg P$	$(P \wedge Q)$	$(P \vee Q)$	$(P \rightarrow Q)$	$(P \leftrightarrow Q)$
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Negacja jest prawdziwa, gdy zdanie składowe jest fałszywe. Negacja **odwraca wartość logiczną**.
Koniunkcja jest prawdziwa, gdy wszystkie zdania składowe są prawdziwe. Wystarczy jedno zdanie fałszywe, aby uczynić całą koniunkcję fałszywą.
Alternatywa jest prawdziwa, gdy przynajmniej jedno zdanie składowe jest prawdziwe. Żeby alternatywa była fałszywa, wszystkie zdania składowe musiałyby być fałszywe.
Równoważność jest prawdziwa, gdy oba zdania składowe mają taką samą wartość logiczną. Równoważność stanowi logiczny **odpowiednik znaku równości**.

Wyjaśnienie implikacji

Implikacja działa jak **obietnica** – uznaje się ją za niespełnioną tylko wówczas, gdy nie została spełniona choć zaistniały wymienione warunki. Np. rozważmy zdanie „jeżeli będzie padał deszcz, pójdę do kina”:

1. Deszcz padał i poszedłem do kina – obietnica została spełniona, zdanie jest prawdziwe.
2. Deszcz padał i nie poszedłem do kina – nie dotrzymałem słowa, zdanie jest fałszywe.
3. Deszcz nie padał i poszedłem do kina – obietnica nie została złamana, ponieważ nie powiedziałem, co zrobię jeżeli nie będzie padać. Zdanie jest prawdziwe.
4. Deszcz nie padał i nie poszedłem do kina – obietnica nie została złamana. Nie wiadomo, co bym zrobił gdyby padało, nie można mi zarzucić kłamstwa. Zdanie prawdziwe.

Wyjaśnienie alternatywy

Alternatywa logiczna jest **niewykluczająca**, tzn. nie wyklucza ona prawdziwości obu zdań. Np. rozważmy zdanie „pójdę do kina lub pójdę do teatru”.

1. Poszedłem do kina i poszedłem do teatru – zdanie prawdziwe, „lub” nie jest tożsame z „albo”.
2. Poszedłem do kina i nie poszedłem do teatru – zdanie prawdziwe, jedna z wymienionych czynności miała miejsce.
3. Nie poszedłem do kina, ale poszedłem do teatru – jak wyżej.
4. Nie poszedłem do kina ani do teatru – zdanie fałszywe.

Rozdział 2 – *Prawa logiki*

1. Prawo podwójnego przeczenia

$$\neg\neg A \equiv A$$

2. Prawa przemienności

$$(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$$
$$(A \vee B) \equiv (B \vee A)$$

3. Prawa de Morgana

$$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$$
$$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$$

4. Prawo negacji implikacji

$$\neg(A \rightarrow B) \equiv (A \wedge \neg B)$$

5. Prawo rozłożenia równoważności

$$(A \leftrightarrow B) \equiv ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$$

6. Prawo rozdzielności

$$(A \wedge (B \vee C)) \equiv ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$$
$$(A \vee (B \wedge C)) \equiv ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$$

7. Prawo pochłaniania

$$((A \wedge \neg A) \vee B) \equiv B$$

Rozdział 3 – *Postaci alternatywne*

Alternatywna Postać Normalna

APN ma postać:

$$(P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

Jak widać, APN niezupełnie stosuje się do reguł formuł logiki zdaniowej. Pozwala na zapis dowolnej formuły logiki za pomocą 3 spójników: negacji, koniunkcji i alternatywy.

Etapy tworzenia APN:

1. Zbuduj tabelę prawdziwości,
2. Wybierz wiersze, dla których cała formuła (ostatnia kolumna) ma wartość 1,
3. Sprawdź jaką wartość mają zdania elementarne:
    - Jeżeli 1 – przepisz.
    - Jeżeli 0 – zastosuj negację.

Przykład: $((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (Q \wedge P)))$

P	Q	$(P \to Q)$	$(Q \wedge P)$	$(P \to (Q \wedge P))$	*
(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(6)**
		$(\mathbf{1}) \to (\mathbf{2})$	$(\mathbf{2}) \wedge (\mathbf{1})$	$(\mathbf{1}) \to (\mathbf{4})$	$(\mathbf{3}) \vee (\mathbf{5})$
0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

APN: $(\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$

Koniunkcyjna Postać Normalna

KPN jest podobny do APN, z tą różnicą, że (na odwrót) „wiersze” są złączone koniunkcją, a zdania elementarne alternatywą.

1. Zbuduj tabelę prawdziwości,
2. Wybierz wiersze, dla których cała formuła ma wartość 0,
3. Sprawdź jaką wartość mają zdania elementarne:
    - Jeżeli 1 – zastosuj negację.
    - Jeżeli 0 – przepisz.

Notacja Polska

spójnik-zmienna-zmienna

$\wedge PQ$ – „mam koniunkcję zdań P i Q”.

W NP w ogóle nie występują nawiasy.

$$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \quad \text{równoważne z} \quad \leftrightarrow \neg \wedge PQ \vee \neg P \neg Q$$

Odwrotna Notacja Polska

zmienna-zmienna-spójnik

ONP jest podobne do NP, z tą różnicą, że spójnik znajduje się po zmiennych. Jest powszechnie wykorzystywany w obwodach elektronicznych.

$$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \quad \text{równoważne z} \quad PQ \wedge \neg P \neg Q \neg \vee \leftrightarrow$$

Minimalizacja zestawu spójników (nie będzie na kolokwium)

Z zestawu spójników możemy wyeliminować równoważność na podstawie prawa rozłożenia równoważności.

$$(A \leftrightarrow B) \equiv ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$$

Implikacji możemy pozbyć się, zastępując ją alternatywą (prawo negacji implikacji):

$$(A \rightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$$

Wykorzystując prawo de Morgana, możemy zastąpić alternatywę koniunkcją:

$$(\neg A \vee B) \equiv \neg(A \wedge \neg B)$$

Ostatecznie zawsze zostaniemy z dwoma spójnikami: negacją i koniunkcją lub alternatywą. Możemy to jednak zredukować do tylko jednego spójnika, ale nie będzie to żaden ze standardowych.

Strzałka Shoffera (bramka NAND)

$$(A \uparrow B) \equiv \neg(A \wedge B)$$

- Negacja: $\neg A \equiv \neg(A \wedge A) \equiv (A \uparrow A)$
- Koniunkcja: $(A \wedge B) \equiv \neg\neg(A \wedge B) \equiv ((A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B))$
- Alternatywa: $(A \vee B) \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B) \equiv ((A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B))$

Należy zauważyć, że taka optymalizacja odbywa się kosztem czytelności.

Strzałka Peirce'a (bramka NOR)

$$(A \downarrow B) \equiv \neg(A \vee B)$$

- Negacja: $\neg A \equiv \neg(A \vee A) \equiv (A \downarrow A)$
- Koniunkcja: $(A \wedge B) \equiv \neg(\neg A \vee \neg B) \equiv ((A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B))$
- Alternatywa: $(A \vee B) \equiv \neg\neg(A \vee B) \equiv ((A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B))$

Rozdział 4 – *Rachunek sekwentów*

Sekwenty mają postać: $\Gamma_1 \vdash \Gamma_2$ lub $\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$
Γ_1 (poprzednik) i Γ_2 (następnik) mogą być jedną lub kilkoma formułami.

- Złożoność obliczeniowa dowodzenia metodą tautologii podwaja się z każdą kolejną zmienną.
- Jednocześnie udowodnione zostało, że niemożliwe jest algorytmiczne wnioskowanie.
- Tautologia nie ma zastosowania w tzw. *logice predykatów* - tam można stosować już tylko sekwenty.

Twierdzenie to sekwent nieposiadający żadnych założeń.
Aksjomat to podstawowy sekwent, który uznaje się za prawdziwy pomimo braku dowodu. To aksjomaty wykorzystuje się w dowodzeniu.

Reguły sekwentów

Tych reguł nie trzeba się uczyć na pamięć, tylko należy je rozumieć i umieć zastosować w zadaniu.

1. Tzw. „aksjomat” (Ax):

$$A \vdash A$$

2. Reguła wprowadzenia koniunkcji ($\wedge +$)*

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A; \Gamma_2 \vdash B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash (A \wedge B)}$$

3. Reguła eliminacji koniunkcji ($\wedge -$)*

$$\frac{\Gamma \vdash (A \wedge B)}{\Gamma \vdash A}$$

4. Reguła wprowadzenia alternatywy ($\vee +$)*

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash (A \vee B)}$$

5. Reguła eliminacji alternatywy ($\vee -$)

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma_1, A \vdash C; \Gamma_2, B \vdash C; \\ \Gamma_3 \vdash (A \vee B)\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash C}$$

6. Reguła wprowadzenia implikacji ($\rightarrow +$)

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash (A \rightarrow B)}$$

7. Reguła eliminacji implikacji ($\rightarrow -$)

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A; \Gamma_2 \vdash (A \rightarrow B)}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash B}$$

8. Reguła wprowadzenia negacji ($\neg +$)

$$\frac{\Gamma, A \vdash}{\Gamma \vdash \neg A}$$

9. Reguła eliminacji negacji ($\neg -$)

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash}{\Gamma \vdash A}$$

10. Reguła sprowadzenia do sprzeczności (RAA)

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A; \Gamma_2 \vdash \neg A}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash}$$

* - przemienne, np. może być $(B \vee A), \Gamma \vdash B$. Regułę oznaczamy wtedy ze znakiem po lewej, np. ($-\vee$).

Spróbujmy udowodnić następujące twierdzenie:

$$\neg(P \wedge Q) \to (\neg P \vee \neg Q)$$

$$\begin{aligned}
(Ax) \quad & \neg(\neg P \vee \neg Q) \vdash \neg(\neg P \vee \neg Q) && (1)\\
(Ax) \quad & \neg P \vdash \neg P && (2)\\
(\vee + : 2) \quad & \neg P \vdash (\neg P \vee \neg Q) && (3)\\
(RAA : 1, 3) \quad & \neg(\neg P \vee \neg Q), \neg P \vdash && (4)\\
(-\neg : 4) \quad & \neg(\neg P \vee \neg Q) \vdash P && (5)\\
(Ax) \quad & \neg Q \vdash \neg Q && (6)\\
(+\vee : 6) \quad & \neg Q \vdash (\neg P \vee \neg Q) && (7)\\
(RAA : 1, 7) \quad & \neg(\neg P \vee \neg Q), \neg Q \vdash && (8)\\
(-\neg : 8) \quad & \neg(\neg P \vee \neg Q) \vdash Q && (9)\\
(+\wedge : 5, 9) \quad & \neg(\neg P \vee \neg Q), \neg(\neg P \vee \neg Q) \vdash (P \wedge Q) && (10)\\
(\text{skr} : 10) \quad & \neg(\neg P \vee \neg Q) \vdash (P \wedge Q) && (11)\\
(Ax) \quad & \neg(P \wedge Q) \vdash \neg(P \wedge Q) && (12)\\
(RAA : 11, 12) \quad & \neg(\neg P \vee \neg Q), \neg(P \wedge Q) \vdash && (13)\\
(\text{skr} : 13) \quad & \neg(P \wedge Q), \neg(\neg P \vee \neg Q) \vdash && (14)\\
(\neg - : 14) \quad & \neg(P \wedge Q) \vdash (\neg P \vee \neg Q) && (15)\\
(+ \to : 15) \quad & \vdash \neg(P \wedge Q) \to (\neg P \vee \neg Q) && (16)
\end{aligned}$$

Rozdział 5 – *Logika predykatów*

Logika predykatów zajmuje się **relacjami między obiektami**.

- **Relacje** – mogą łączyć 1, 2, 3 i więcej obiektów. Relacje opisujemy za pomocą *predykatów*: $P_1^2, P_2^4, P_3^1, \ldots$ (górny indeks oznacza liczbę argumentów) lub P, Q, R, S.
- **Funkcje** – tworzą nowe obiekty. Językowa reprezentacja funkcji to *funktor*: $f_1^4, f_2^2, f_3^1, \ldots$ lub f, g, h.
- **Ustalone obiekty** – w języku logiki reprezentowane przez *stałe*: $a_1, a_2, a_3, \ldots$ lub a, b, c.
- **Nieustalone obiekty** – reprezentowane przez *zmienne indywiduowe*: $v_1, v_2, v_3, \ldots$ lub x, y, z.

Przykład:

$$P_7^3(v_1, a_2, f_7^2(a_0, v_3))$$

Tak utworzona formuła to tzw. **formuła atomowa** posiadająca wartość logiczną (relacja między obiektami może istnieć lub nie) – np:

„Jan jest wysoki” (obiekt: Jan, relacja: wysoki 1-arg.)
„Jan jest wyższy niż Andrzej” (obiekty: Jan, Andrzej, relacja: wyższy 2-arg.)

W logice predykatów możemy stosować symbole logiczne w tym kwantyfikatory.

$$\forall x \ - \text{dla każdego } x \text{ (all)}$$
$$\exists x - \text{istnieje taki } x \text{ (exists)}$$

Termy opisują obiekty. Mogą nimi być: stałe, zmienne i jeżeli f jest funktorem a $t_1..t_n$ argumentami, to $f(t_1..t_n)$ reprezentuje pewien obiekt.

$$\exists x(P(x, y) \wedge Q(x)) \rightarrow \forall y Q(y)$$

- **Zmienna związana** – zmienna podporządkowana kwantyfikatorowi.
- **Zmienna wolna** – zmienna niezwiązana kwantyfikatorem (y wyróżnione kolorem)

Prawdziwość formuły logiki predykatów możemy ocenić jeżeli znamy:

1. uniwersum
2. relacje
3. funkcje
4. wyróżnione stałe

Tautologia logiki predykatów

$$(\neg \forall x P(x) \leftrightarrow \exists x \neg P(x))$$

„Nie wszystkie x posiadają cechę P” równoważne z „istnieje takie x które nie posiada cechy P”.

$$(\neg \exists x P(x) \leftrightarrow \forall x \neg P(x))$$

„Nie istnieje x posiadające cechę P” równoważne z „żadne x nie posiada cechy P”.