Algebra - powtórzenie wiadomości

Rozdział 1 – *Struktury algebraiczne*

Działanie jest funkcją 2-argumentową.

$$L * P \leftrightarrow *(L, P)$$

Każde działanie musi funkcjonować w jakimś zbiorze, tzn. dla dowolnych dwóch elementów zbioru przyporządkowywać trzeci element z tego zbioru.

Na przykład, dodawanie jest działaniem w zbiorze liczb naturalnych – suma dwóch liczb naturalnych zawsze da liczbę naturalną. **Z drugiej strony**, odejmowanie nie jest działaniem w zbiorze liczb naturalnych – można odjąć od siebie dwie liczby naturalne i otrzymać liczbę ujemną, która nie jest naturalna. Odejmowanie jest **działaniem w zbiorze liczb całkowitych**.

Własności działań

1. Przemienność

Działanie jest przemienne, jeżeli dla dowolnych dwóch elementów zbioru, w którym określone jest działanie, spełnione jest równanie:

$$x * y = y * x$$

Poniżej to samo wyrażenie z użytym kwantyfikatorem ogólnym:

$$\bigwedge_{x,y \in X} x * y = y * x$$

Przykłady działań przemiennych: dodawanie, mnożenie.

2. Łączność

$$\bigwedge_{x,y,z \in X} x * (y * z) = (x * y) * z$$

3. Element neutralny

Element neutralny, jest to taki element, który jako operand działania umieszczony z lewej bądź prawej strony, nie zmienia jego wyniku. Każde działanie może posiadać tylko jeden element neutralny.

$$\bigvee_{e \in X} \bigwedge_{x \in X} e * x = x * e = x$$

Co należy odczytywać jako: istnieje taki element neutralny e, że dla każdego x...

Przykładowo, elementem neutralnym dodawania jest 0, a mnożenia – 1. 0 nie jest elementem neutralnym odejmowania, ponieważ $0 - x = -x$, a nie x.

4. Odwracalność

Elementy odwracalne, jeżeli zostaną użyte jako operandy działania (obojętnie w jakiej kolejności), **wynik działania będzie elementem neutralnym**:

$$x * x^I = x^I * x = e$$

Na przykład:

$$x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1,$$

zatem elementem odwrotnym x dla mnożenia jest $\frac{1}{x}$, a x (i $\frac{1}{x}$) są elementami odwracalnymi.

💡 Warto zauważyć, że istnienie elementu neutralnego i odwracalność, to własności posiadające cechy **przemienności**. Dlatego nawet jeśli zadanie wprost nie wymaga udowodnienia przemienności, **udowodnienie jej często okaże się pomocne**. Jednocześnie, nie każde działanie posiadające element neutralny czy odwracalne będzie też przemienne dla dowolnych elementów zbioru.

Dodatkowe pojęcia

- *grupa* – para *(zbiór, działanie)* – $(X, *)$, jeżeli działanie jest:
  1. łączne,
  2. istnieje element neutralny,
  3. każdy element jest odwracalny.
- *grupa abelowa* – grupa, której działanie jest dodatkowo przemienne.
- *ciało* – $(K, \oplus, \odot)$, gdzie K jest zbiorem, oraz:
  1. $(K, \oplus)$ jest grupą abelową,
  2. $(K \setminus \{0\}, \odot)$ (K z wyłączeniem 0) jest grupą abelową,
  3. działanie $\odot$ jest rozdzielne względem $\oplus$:

$$\bigwedge_{x,y,z \in K} x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z).$$

Rozdział 2 – *Liczby zespolone*

Liczba i (*jednostka urojona*), jest to taka liczba, że $i^2 = -1$.

$$i = (0, 1)$$
$$(a, b) = a + bi$$

$$z = (a, b), Re(z) = a, Im(z) = b$$

Dodawanie i mnożenie liczb zespolonych

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

Sprzężenie

$$z=(a,b)$$
$$\overline{z}=(a,-b)$$
$$-z=(-a,b)\ //\text{dla porównania}$$

Własności:

1. $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$
2. $\overline{z-w}=\overline{z}-\overline{w}$
3. $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$
4. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{w}}\wedge w\neq 0$
5. $\overline{(z^n)}=\left(\overline{z}\right)^n\wedge n\in N\wedge(n\leq 0\rightarrow z\neq 0)$
6. $z\in\mathbb{R}\leftrightarrow\overline{z}=z$

Moduł (wartość bezwzględna)

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

Na *płaszczyźnie Gaussa* (reprezentacji liczb zespolonych na płaszczyźnie) moduł oznacza **odległość od punktu** $(0,0)$.

Własności:

1. $|z|=\sqrt{z\cdot\overline{z}}=|-z|$
2. $|z\cdot w|=|z|\cdot|w|$
3. $\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}\wedge w\neq 0$
4. $|z|\geq|Re(z)|\geq Re(z)$
5. $|z|\geq|Im(z)|\geq Im(z)$
6. $||z|-|w||\leq|z+w|\leq|z|+|w|$
7. $|z^n|=|z|^n\wedge z\neq 0$
8. $\left|\sum\limits_{n=0}^{n}z^n\right|\leq\sum\limits_{n=0}^{n}\left|z^n\right|$

Postać trygonometryczna

Każdą liczbę zespoloną $z=a+bi$ można przedstawić w postaci trygonometrycznej:

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$
$$\cos\alpha = \frac{a}{|z|}$$
$$\sin\alpha = \frac{b}{|z|}$$

Kąt α (niekiedy oznaczany jako θ) to tzw. **argument** i jest ich nieskończenie wiele. **Argumentem głównym** nazywamy najmniejszy nieujemny argument.

Geometrycznie argument jest kątem pomiędzy prostą zawierającą 0 i liczbę z, a osią rzeczywistą.

Mnożenie i dzielenie

💡 Generalnie wszystkie wzory będą zawierać tą samą część w nawiasie przy $\cos$ i $\sin$.

$$z \cdot w = |zw|(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))$$
$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta))$$

Potęgowanie

Dla $n \in \mathbb{Z}$

$$z^n = |z|^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$$

Pierwiastki

Liczba zespolona ma wiele pierwiastków – dokładnie tyle ile równy jest stopień pierwiastka.

Pierwiastek n-tego stopnia z liczby z oznaczymy jako $w_k = \sqrt[n]{z}$, gdzie k jest liczbą całkowitą z przedziału $[0, n-1]$. Przeważnie musimy obliczyć każdy z tych pierwiastków.

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$$

Nie zawsze jesteśmy w stanie określić argument α. Na przykład dla $35+12i$:

$$|z| = \sqrt{35^2+12^2} = 37$$
$$\cos\alpha = \frac{35}{|z|} = \frac{35}{37} \text{ //nie ma w tablicach!}$$

W takim wypadku musimy wykorzystać równanie.

$$z = a_z + b_z i, w = \sqrt{z} = a + bi$$
$$(a+bi)^2 = a_z + b_z i$$
$$a^2 + 2abi - b^2 = a_z + b_z i$$

Po rozdzieleniu części rzeczywistej i urojonej zostaje nam:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = a_z \\ 2ab = b_z \end{cases}$$

Czyli w naszym przykładzie:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 35 \\ 2ab = 12 \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy podwójne równanie kwadratowe:

$$\begin{cases} b^4 + 35b^2 - 36 = 0 \\ a = \frac{6}{b} \end{cases}$$
$$t = b^2 \geq 0$$
$$t^2 + 35t - 36 = 0$$

Z delty otrzymujemy $t_1 = -36$ i $t_2 = 1$. Ale t jest wynikiem potęgowania, zatem nie może być ujemne (założywszy, że b jest liczbą rzeczywistą będącą częścią urojoną pewnej liczby zespolonej). Czyli $t = 1$.

Zatem b będzie równe 1 lub -1.

$$b = 1 \vee b = -1$$
$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ a_1 = 6 \end{cases}$$
$$\begin{cases} b_2 = -1 \\ a_2 = -6 \end{cases}$$

$$w_0 = 6 + i$$
$$w_1 = -6 - i$$

Rozdział 3 – *Macierze*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

m - liczba wierszy
n - liczba kolumn
i - numer wiersza
j - numer kolumny

- **macierz kwadratowa** - o równej liczbie wierszy i kolumn
- **macierz diagonalna** - której wszystkie elementy poza główną przekątną są zerami

- **macierz jednostkowa** (I) - której przekątna główna składa się z samych jedynek, a reszta to zera
- **macierz zerowa** - której przekątna główna składa się z samych zer
- **transpozycja** A^T - działanie, w którym wiersze stają się kolumnami, a kolumny wierszami

Dodawanie macierzy

Można dodać tylko macierze o identycznych wymiarach. Każdy element dodajemy niezależnie.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$
$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

Mnożenie macierzy

Mnożenie macierzy można wykonać tylko jeżeli liczba wierszy pierwszej macierzy jest równa liczbie kolumn drugiej macierzy. **Mnożenie nie jest przemienne**.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$
$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$

Każdy element nowo powstałej macierzy to suma iloczynów $a_{ik} \cdot b_{kj}$, gdzie:

- i - numer wiersza,
- k - numer iteracji (który to składnik sumy),
- j - numer kolumny.

Analogicznie:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$
$$B \cdot A = \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} & b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} & b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} \\ b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} & b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} & b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} \end{bmatrix}$$

Determinant (wyznacznik) macierzy

⚠️ **„wiersz” oznacza tu wiersz lub kolumnę.**

Determinant można obliczyć tylko z macierzy kwadratowych. Jest on równy 0, jeżeli:

- istnieje wiersz wypełniony zerami,
- istnieją 2 identyczne wiersze.

Macierz 1x1:

$$\left|a_{11}\right| = a_{11}$$

Macierz 2x2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Macierz trójkątna:

Macierz, której część pod lub nad przekątną jest wypełniona zerami

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44}$$

Dla większych macierzy można skorzystać z *metody Laplace'a*.

Z definicji:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j} det A_{1j}$$

1. Wybieramy dowolny wiersz – najlepiej taki **z największą liczbą zer**,
2. sumujemy każdy element pomnożony przez:
   - $(-1)^{i+j}$ (1 lub -1),
   - determinant *minora* (macierz bez wiersza i kolumny na przecięciu których znajduje się element).

Jest to wzór rekurencyjny.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot ... + 0 \cdot ... \quad \leftarrow 0 \cdot x = 0$$
$$= 4 \cdot (3 \cdot 3 - 1 \cdot 2) = 28$$

Działania elementarne

Działania elementarne można przeprowadzać na wierszach lub kolumnach. Są pomocne przy tworzeniu zer w wierszach, co pozwala oszczędzić liczenia. **Niektóre z nich powodują zmianę determinanta!**

opis	działanie	determinant
dodanie wiersza pomnożonego przez liczbę	$w_i^I = w_i + nw_j$	bez zmian

opis	działanie	determinant
zamiana dwóch wierszy	$w_i^I = w_j, w_j^I = w_i$	$\det \cdot (-1)$
pomnożenie wiersza przez liczbę różną od zera	$w_i^I = nw_i \wedge n \neq 0$	$\det \cdot n$

⚠️ Na kolokwium każde działanie elementarne musi być uzasadnione!